Die Bildungsaufgaben und die Entwicklung des mathematischen Unterrichtes seit den Meraner Reformvorschlägen unter Berücksichtigung der philosophischen Zeitströmungen.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

einer

Hohen Philosophischen Fakultät

der

Martin Luther-Universität Halle a. S.

vorgelegt von

Karl Pietzker

aus Halle a. S.

Halle a. S. 1936.

Buchdruckerei Richard Mayr, Würzburg.

1. Berichterstatter: Professor Dr. P. Menger.

2. Berichterstatter: Professor Dr. H. Jung.

Tag der mündlichen Prüfung: 19. Februar 1936.

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Meinen lieben Eltern

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544704_0152

Inhaltsverzeichnis.

Seite

I. Hinwendung von der Form zum Inhalt 7

II. Hauptteil.

1. Die Entwicklung des Geometrieunterrichtes und das Verhältnis von Anschauung und Denken 7
2. Die Meraner Vorschläge und der wissenschaftliche Charakter des mathematischen Unterrichtes unter besonderer Berücksichtigung der Gebiete, die auf der Zahl aufbauen 23
3. Die Pflege des funktionellen Denkens 29

III. Zusammenfassung und Ausblick 39

IV. Literaturverzeichnis.

Die Hinwendung von der Form zum Inhalt.

„Das Wirken Felix Kleins wird allezeit ein Markstein in der Entwicklung des mathematischen Unterrichtes bleiben." Deutlicher als durch diese Worte Timerdings[1]) konnte nicht auf die um die Jahrhundertwende einsetzende Reformbewegung im mathematischen Unterricht hingewiesen werden. Jetzt, nachdem zahlreiche Erfahrungen gesammelt und auch manche Irrwege erkannt worden sind, soll im folgenden der Anteil herausgestellt werden, den der im Sinne der Meraner Ziele durchgeführte mathematische Unterricht bei der Formung und Bildung unserer Jugend leisten sollte. Diese gewiß nicht leichte Aufgabe ist vielleicht im Augenblick, wo neue Blickpunkte das Gleichgewicht verschieben, eine sehr dankbare.

Wohl nichts hat dem Ansehen des mathematischen Unterrichtes mehr geschadet als jene Zeit, in der man die formal-logische Schulung als hauptsächlichstes Bildungsziel einseitig hervorkehrte. Bis in die zweite Hälfte des 19. Jahrhunderts war für die Wissenschaft und Schule das System Euklids vorbildlich, von seiten der Philosophie war es das einzig anerkannte. Aber gerade darin, daß man in den Schulunterricht dieses starre Euklidische Gebäude in systematischer Form übernahm, liegt zu einem großen Teile der Grund dafür, daß man vergeblich nach anderen Bildungswerten suchte und in der Verkrampfung das formallogische Prinzip überspitzte.

Das Jahr 1872 bedeutete einen ersten Wendepunkt. In Leipzig und etwas später in Gera[2]) wird von Schulmännern gefordert, daß der starre Weg Euklids zu verlassen sei. Man erkannte immer mehr, daß der mathematische Unterricht einen ihm spezifischen Bildungswert, das räumliche Anschauungsvermögen, nicht zur Entfaltung brachte. Es wurde an Pestalozzi und besonders an Herbart erinnert, die in ihrer Forderung nach Durchdringung von ebener und räumlicher Geometrie, nach Beweglichmachung der Figuren und nach genetischer Anordnung des Stoffes einen natürlichen Weg zur Entfaltung dieses Bildungswertes gezeigt hatten.

1873 wies Gallenkamp[3]) darauf hin, daß ohne Aufnahme der analytischen Geometrie und der Infinitesimalrechnung der Gymnasialabiturient

1) Vgl. die Festschrift der Naturwissenschaften anläßlich Kleins 70. Geburtstag! 1919.

2) S. Treutlein: Der geometrische Anschauungsunterricht als Unterstufe eines zweistufigen geometrischen Unterrichtes. 1911.

3) S. Klein: Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland. 1910—1916.

nie eine Vorstellung von der großen Kulturarbeit auf dem Gebiete der Naturwissenschaften erhalten könne. Der Schlüssel zu diesen Gebieten ist aber die Fähigkeit funktionalen Denkens. Die Bedeutung desselben hatte 1877 E. du Bois-Reymond in der viel beachteten Rede über „Die preußische Gymnasialbildung im Kampfe mit der fortschreitenden Amerikanisierung“[1]) hervorgehoben. Nachdem er das durch Ueberlieferung für die Oberklassen festgelegte mathematische Bildungsgut angegriffen hatte, äußerte er sich: „Das Studium der Mathematik entfaltet seine bildende Kraft vollauf erst mit dem Uebergang von den elementaren Lehren zur analytischen Geometrie. Unstreitig gewöhnt schon einfachste Geometrie und Algebra den Geist an scharfes quantitatives Denken sowie daran, nur Axiome oder schon Bewiesenes für richtig zu nehmen. Die Darstellung von Funktionen in Kurven oder Flächen aber eröffnet eine neue Welt von Vorstellungen und lehrt den Gebrauch einer der fruchtbringendsten Methoden, durch welche der menschliche Geist seine eigenen Leistungen erhöhte... Diese Methode wurzelt in den letzten Tiefen menschlicher Erkenntnis und hat dadurch ganz andere Bedeutung als der sinnreichste, einem besonderen Falle dienende analytische Kunstgriff.“

Auf den schulischen Erfahrungen Höflers fußend, wird die graphische Darstellung als ein wertvolles Mittel zum Uebersehen des Funktionsverlaufes schon 1884 in den österreichischen Gymnasiallehrplan aufgenommen. Höfler selbst äußerte sich: „.... daß es überhaupt kein besseres Mittel gibt, den Schüler mit den Eigenschaften der verschiedenen Funktionen der Elementarmathematik vertraut zu machen, als indem man ihn anhaltend und vielseitig mit ihren graphischen Darstellungen beschäftigt.... daß das Vertrautwerden mit dem Funktionsbegriff, d. h. die Gewöhnung, die Gebilde der Elementarmathematik und die goniometrischen Funktionen ganz ausdrücklich sub specie des Funktionsbegriffes zu betrachten und zu beherrschen, das natürliche Ziel des ganzen mathematischen Mittelschulunterrichtes bilden sollte.“

Trotz allem bleibt für Preußen amtlicherseits die Richtung noch maßgebend, die am besten durch Wittstein 1864 in Hannover[2]) charakterisiert worden ist, wenn er behauptet, daß für die Schule nur die Teile der Mathematik, die sich mit beständigen Größen befassen, Bedeutung haben,

1) E. Du Bois-Reymond: Reden, Bd. 1. 1912.
2) Vergl. Klein: Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland. 1910—1916.

alles übrige, was auf dem Begriffe der Veränderlichen beruhe, sei wegzulassen.

Auf der Tagung des neu gegründeten Vereins zur Förderung des Unterrichtes in der Mathematik und den Naturwissenschaften 1891 in Braunschweig wollte Richter vollkommen mit dem Ziele der formal-logischen Schulung brechen. Immer deutlicher wurde spürbar, daß der mathematische Unterricht in der bestehenden Form die Schüler nicht für die Anforderungen des Lebens reif machte. Die Folge davon war, daß eine Reihe von Schulmännern eine einseitige Betonung der Anwendungen propagierten. Pietzker vermittelte, und es kam zu den Braunschweiger Beschlüssen: „Die Schüler der höheren Lehranstalten sind i. a. noch zu wenig imstande, in den sich ihnen im Leben darbietenden Erscheinungen das Mathematische zu erkennen. Die Ursache davon ist vorzugsweise in dem Umstand zu suchen, daß die Anwendungen in künstlich gemachten Beispielen bestehen, anstatt sich auf die Verhältnisse zu beziehen, die sich in der Wirklichkeit darbieten. Daher muß das System der Schulmathematik, unbeschadet seiner vollen Selbständigkeit als Unterrichtsgegenstand, im einzelnen mit Rücksicht auf die sich naturgemäß darbietende Verwendung aufgebaut werden."

Wenn sich nun Haucks Aeußerung, eine gesunde Pädagogik bewege sich zwischen Abstraktion und Anwendung, bestätigte, müßte man meinen, für die Folgezeit sei alles in bester Ordnung gewesen. Aber Abstraktion und Anwendung standen sich damals ohne inneres Band gegenüber und waren unvereinbar. Da wandte Klein um die Jahrhundertwende seine Aufmerksamkeit besonders dem mathematischen Unterrichte zu. Sein Wirken sollte bis zum heutigen Tage auf die Entwicklung des mathematischen Unterrichtes von Einfluß sein. „Gewiß ist dieses und jenes, was Klein mit Einsetzung seiner glänzenden Redner- und Darstellungsgabe vertreten und mit der ihm eigenen und besonnenen, durch keinen Widerspruch zu verwirrenden Sicherheit verteidigt hat, schon vorher von anderen ebenso oder ähnlich geäußert worden. Aber es allgemein durchzusetzen, hatte doch niemand vermocht", schreibt Timerding in der schon genannten Festschrift.

Die Hartnäckigkeit, mit der man zwei spezifischen, nur vom mathematischen Unterricht zu entfaltenden Bildungswerten eine gebührende Stellung verweigerte, veranlaßte Klein auf den Tagungen 1903 in Kassel,

1904 in Breslau[1]) und schließlich 1905 in Meran die Aufmerksamkeit ausschließlich auf diese zu konzentrieren. In Gutzmers Berichten über „Die Tätigkeit der Unterrichtskommission der Gesellschaft deutscher Aerzte und Naturforscher"[2]) heißt es darüber: „Ferner wird es sich darum handeln, unter voller Anerkennung des formalen Bildungswertes der Mathematik auf alle einseitigen und praktisch bedeutungslosen Spezialkenntnisse zu verzichten, dagegen die Fähigkeit zur mathematischen Betrachtung der uns umgebenden Erscheinungswelt zu möglichster Entwicklung zu bringen. Von hier aus entspringen zwei Sonderaufgaben: Die Stärkung des räumlichen Anschauungsvermögens und die Erziehung zur Gewohnheit funktionalen Denkens. — Die von je dem mathematischen Unterricht zugewiesene Aufgabe der logischen Schulung bleibt dabei unbeeinträchtigt, ja man kann sagen, daß diese Aufgabe durch die stärkere Pflege der genannten Richtung des mathematischen Unterrichtes nur gewinnt, insofern dadurch die Mathematik mit dem sonstigen Interessenbereich des Schülers, in dem sich doch seine logische Fähigkeit betätigen soll, in engere Fühlung gebracht wird." Diese deutliche Hinwendung von der Form zum Inhalt als Primärem, diese Erkenntnis, daß eine wertvolle formale Bildung nur an einem wertvollen Inhalt gewonnen werden kann, hat auch schon Höfler hervorgehoben[3]). Das abstrakte Denken wird an der Wirklichkeit orientiert und führt die Schüler nicht mehr in leere Phantasiegebilde. Es wird nicht mehr an solchen Aufgaben geübt, die aller Wirklichkeit und praktischen Verwendbarkeit Hohn sprechen.

Schimmack[4]) bezeichnet als den Kern der Meraner Reform die auf frühen Stufen beginnende Durchdringung des mathematischen Schullehrstoffes mit den anschaulich zu fassenden Grundbegriffen der veränderlichen Größe und der funktionalen Abhängigkeit. Es seien dies Begriffe, auf denen, abgesehen vom einfachsten Zahlenrechnen, vornehmlich die Bedeutung der Mathematik innerhalb der gegenwärtigen Kultur beruht.

---

1) Klein: Vorschläge für die Umgestaltung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtes an den Höheren Schulen, gerichtet an die Schulkommission der Naturforscherversammlung 1904.

2) Vergl. Gutzmer: Die Tätigkeit der Unterrichtskommission der Gesellschaft deutscher Aerzte und Naturforscher. 1908.

3) Vgl. Höfler: Didaktik des mathematischen Unterrichtes S. 17. 1910.

4) Schimmack in Kleins: Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland. 1910—1916.

Das Interesse, das Klein stets an der Entwicklung der Technik zeigte, hatte ihn die Bedeutung des Funktionsbegriffes ganz besonders für die Technik und die Naturwissenschaften erkennen lassen. Das Hineinwandern des Funktionsbegriffes, der analytischen Geometrie und der Infinitesimalrechnung in den Schulstoff ist für die folgende Zeit ein äußerer Anzeiger für das Fortschreiten der Reform. Ursprünglich für den Schulunterricht verboten und durch das Schellbachsche Verfahren umgangen, stehen sie zur Zeit der Meraner Tagung noch in Randstellung, insofern, als der Unterricht bis an die Schwelle der letzten beiden Stoffgebiete führen sollte. Heute sind sie unentbehrliche Bildungsgüter des mathematischen Unterrichtes geworden. Aber gerade aus diesem Grunde sei hier eine Stelle von Weinreich[1]) angeführt: „Wir sind ja heute auf Schritt und Tritt von solchen kurvenmäßigen Wiedergaben funktionaler Zusammenhänge im praktischen Leben, in Handel und Industrie umgeben, daß es uns schwer fällt, die Neuartigkeit der Forderung Reymonds zu würdigen, wenn er dafür Stimmung macht, um der Uebersichtlichkeit willen die Aenderung der Erscheinungen in ihrer Abhängigkeit von den Bedingungen durch Kurven darzustellen." Wenn nun auch etwa eine amtliche Regelung, die den seit 1905 heftig einsetzenden Bestrebungen Rechnung trug, erst 1925 in den Richertschen „Richtlinien für die Lehrpläne der höheren Schulen Preußens" erfolgte, so muß doch festgestellt werden, daß die Lehrpläne von 1901[2]) der umwälzenden Entwicklung des mathematischen Unterrichtes nicht hinderlich gewesen sind. Den Weg, den die Entwicklung in diesen 24 Jahren genommen hat, erhellt unter den vielen möglichen z. B. die folgende Gegenüberstellung: In den Lehrplänen von 1901 heißt es: „Für die oberste Klasse des Gymnasiums ist die Einführung der Schüler in die wichtigsten Koordinatenbegriffe sowie eine möglichst einfach gehaltene Darstellung einiger Grundeigenschaften der Kegelschnitte, die auch in synthetischer Form gegeben werden kann, vorgesehen." Der Funktionsbegriff selbst wird nur in ganz versteckter Form aufgenommen, indem es bei der für Oberprima empfohlenen Rückschau heißt: „Dabei wird sich Gelegenheit bieten, den Schülern ein eingehendes Ver-

1) Weinreich: Die Fortschritte der mathematischen Unterrichtsreform in Deutschland seit 1910. Leipzig, 1915.

2) Lehrpläne und Lehraufgaben von 1901. Auf sie waren, was die Mathematik anbetrifft, von wesentlichem Einfluß: Schwering, Schwalbe und Holzmüller. Vgl. Klein: Abhandlungen 3. Band, 1. Teil. Klein im Schlußwort bei Lietzmann: Berichte und Mitteilungen veranl. d. IMUK. 1917.

ständnis des Funktionsbegriffes, mit dem sie schon auf früheren Stufen bekannt geworden sind, zu erschließen." In den an die revidierten Meraner Reformvorschläge anknüpfenden Richtlinien dagegen findet man: „.... Schon in U III beginnt die Einführung in die Grundlagen der graphischen Darstellung an praktischen Beispielen. Daran schließen sich in rein anschauungsgemäßer Behandlung die wichtigsten Eigenschaften empirischer Funktionen."

Dabei ist aber nur an die graphische Darstellung in rechtwinkligen Koordinaten auf mathematischem Wege gedacht. In ihrem allgemeinsten Sinne, in Gestalt der verschiedensten Schaubilder, durchdrang sie schon den Rechenunterricht der Unterstufe. Besonders als die zunehmende Herrschaft der Zahl in und nach dem Weltkriege auf allen Gebieten des praktischen Lebens zur Veranschaulichung der Größenordnungen drängte, wurden diese Veranschaulichungen oft sogar in mathematisch nicht einwandfreier Form unter dem Bestreben ausgesprochener Lebensnähe weitgehendst aufgenommen.

Es wäre nicht richtig, wollte man annehmen, daß man in den bisher hervorgehobenen Bildungswerten die einzigen seit der Zeit der Meraner Vorschläge gesehen habe. Es werden im Verlaufe der weiteren Ausführungen noch eine ganze Reihe wichtiger Bildungswerte des mathematischen Unterrichtes genannt werden. Es sei ferner darauf hingewiesen, daß Kerschensteiner in den von Klein hervorgehobenen Bildungswerten wohl „zwei spezifische Bildungswerte der mathematischen Bildungsgüter wie der mathematischen Physik" anerkannte, daß er sie jedoch nicht für die wichtigsten und wertvollsten gehalten hat[1]). Es ist richtig, wenn Kerschensteiner in dem funktionalen Denken nur eine Sonderform des logischen Denkens erblickt hat. Er hätte aber zu dieser Feststellung hinzufügen müssen, daß gerade diese Sonderform charakteristisch für das Denken fast aller europäischen Völker geworden ist. Auf seine Bedeutung wird noch hingewiesen werden. Die Feststellung auf dem Kongreß der Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission 1914[2]) in Paris, daß die Infinitesimalrechnung in allen Ländern beträchtlich an Boden gewonnen habe und zu einem Bestandteil des Schullehrstoffs geworden sei, ist ein

1) Vgl. Kerschensteiner: Theorie der Bildung 1926.

2) Lietzmann: Methodik des mathematischen Unterrichts. 1923. Ferner Lietzmann: Berichte und Mitteilungen, veranlaßt durch die Internationale Mathematische Unterrichtskommission 1917.

äußerer Beleg hierfür. Kerschensteiners zweiter Einwand „Die Entwicklung der Fähigkeit räumlicher Anschauung aber ist hauptsächlich wegen ihres Nutzwertes für bestimmte Lebensberufe von Bedeutung" ist einseitig gesehen. Zu diesem Zwecke soll Treutlein[1]) zu Worte kommen: „Vielmehr kann jene Ein- und Weiterführung sinngemäß nur so erfolgen, daß der einzelne Lernende selbst diese Erfahrung sammelt, daß er selbst seine Sinne gebrauchen, daß er sehen lernt, daß er auf Grund eigener Anschauung sich die nötigen Grundlagen an Raumvorstellungen schafft und erringt, um diese nachher durch Verknüpfung vertiefend festzulegen, sei's um sie bei weiteren Studien zu anknüpfender logischer Arbeit verwendbar zu machen, sei's, um sie auch ohne letztere als unverlierbaren Besitz fürs Leben zu bewahren...."

Diese letzten Erörterungen aber führen mitten in die Kernfragen, betreffend die völlige Veränderung des mathematischen Bildungsgutes der Schule und die anderen Wege zur Entfaltung der ihm innewohnenden Bildungswerte.

Die Entwicklung des Geometrieunterrichtes und das Verhältnis von Anschauung und Denken.

In der Elementarmathematik vom höheren Standpunkte[2]) aus hat Klein zwei gegenüberstehende Grundlegungen der metrischen ebenen Geometrie gegeben, die bis zum einem gewissen Grade charakteristisch für die verschiedenartige Behandlung derselben im Schulunterricht vor und nach der Reform geworden sind. Während in der einen zu den Grundbegriffen Punkt und Gerade, zu den Axiomen der Verknüpfung, Anordnung und Stetigkeit axiomatisch eine Gruppe von ∞^3 Bewegungen der Ebene hinzutritt, wird bei der anderen gerade der Begriff der Bewegung konsequent vermieden. Der letztere Aufbau war seit Euklid bis weit in die Gegenwart in Wissenschaft und Schule der bevorzugte. Den Grund dafür sah Klein in philosophischen Gedankengängen. „Man fürchtete, mit den Bewegungen in die Geometrie ein ihr fremdes Element, die Zeit, hineinzubringen, und versuchte man, das Voranstellen der Bewegungen mit der großen Anschaulichkeit des starren Körpers zu rechtfertigen, so

1) Vgl. Treutlein: Der geometrische Anschauungsunterricht als Unterstufe eines zweistufigen geometrischen Unterrichtes. 1911.
2) Klein: Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. 1925.

kam der Einwand, daß diese Idee an sich gar keinen präzis faßbaren Sinn habe, sondern gerade umgekehrt erst begründet werden könne, wenn man schon vorher den Begriff der Entfernung besitzt. Dem wird der Empirist freilich immer entgegenstellen können, daß tatsächlich die abstrakte Idee der Entfernung erst aus dem Vorhandensein hinreichend starrer Körper entnommen sei."

Der starre, die Bewegung ausschließende Aufbau der Geometrie hat sich für den geometrischen Anfangsunterricht als unnatürlich, unpädagogisch und als unanschaulich erwiesen, zumal er vielfach in systematischer Form an den Anfänger herangebracht wurde. Mit dem Parallelverschieben, dem Drehen und Umklappen wurde etwas in die Geometrie aufgenommen, was jedem Menschen von den ersten Anfängen des geometrischen Zeichnens her geläufig ist oder wie Klein an anderer Stelle sagt: „Das ist ja das erste, was man tut, daß man einen starren Körper, Lineal oder Zirkel oder dgl. von einem Ort der Zeichenebene zum andern bewegt, um Größen zu übertragen"[1]). Dieses natürliche Tun, das zugleich den immer heftiger einsetzenden arbeitsunterrichtlichen Bestrebungen entgegenkam, sah man im Euklidischen Aufbau ausgeschlossen, mußten doch dort die Beziehungen auf dem für Anfänger weit schwierigerem Wege des rein logischen Beweisens hergestellt werden. Um die Ablehnung, die dieser letzterer Weg hinsichtlich des Anfängerunterrichtes von seiten der um die Reform verdienten Mathematiker gefunden hat, deutlich zu machen, sollen einige zu Worte kommen. Höfler sagt: „Für 10—13 jährige Kinder gibt es noch keine mathematische Wissenschaft, weder in Definitionen noch in Beweisen, die ihnen beigebracht werden müssen." Treutlein äußert sich: „Wer diese Beweise jemals im Anschluß an Kambly, Reidt, Spieker .... mit Quartanern gepaukt hat, der weiß, welch kostbare Zeit damit verloren wird." An anderer Stelle findet man: „Die Beweisverfahren in der bekannten Euklidischen Weise verwenden aber in kunstreicher Zusammenfügung Schlüsse und Schlußreihen, d. h. auf Grund vorher als richtig anerkannter Urteile aus diesen abgeleitete neue Urteile. Wie immer auch noch Inhalt und Form diese Urteile gestaltet sein mögen, sie entstehen nur durch Verknüpfung von Begriffen, diese Begriffe aber sind sprachlich

1) Klein: Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. 1925.
Es muß hierzu bemerkt werden, daß es eine wichtige Aufgabe des geometrischen Anfangsunterrichtes ist, die ersten Lagebeziehungen in Größenbeziehungen überzuführen. Es sei schon hier darauf hingewiesen, wie zeitig bei Klein bereits die Größe auftritt und die reinen Lagebeziehungen zurücktreten.

geprägte Zusammenfügungen je einer größeren oder kleineren Zahl von Merkmalen und Eigenschaften von Dingen, die der Betrachtung unterstehen. Diese Eigenschaften haben sich ergeben als sogenannte innere Anschauung oder Vorstellung auf Grund der Betätigung unserer Sinne." Diese innere Anschauung in einem empirisch gehaltenen Vorkurs zu entwickeln, war die erste Aufgabe.

Eine weitere Erleichterung sah Treutlein darin, daß er schon im ersten Geometrieunterricht die Denkweise der neueren Geometrie benutzte, bei der Punkt, Gerade und Ebene beweglich gedacht werden, bei der der Kreis die Bahn eines Punktes ist, bei der Zylinder und Kegel durch zwangsläufiges Bewegen einer Geraden entstehen (Näheres siehe beim Abbildungsgedanken). Treutlein selbst äußerte sich hierzu: Gegenüber der Starrheit und Unbeweglichkeit der geometrischen Gebilde führt die moderne Betrachtungsweise die Entstehung der Gebilde durch Bewegung und Aenderung ihrer Lage zu einer größeren Anschaulichkeit und natürlichen Beweisführung."

Es würde im Rahmen dieser Betrachtungen zu weit führen, auf didaktische Einzelheiten einzugehen. Ein Blick in die Lehrbücher zeigt, wie der Winkel durch Drehung eines Halbstrahls erklärt wird, wie die ariale und zentrale Symmetrie einen breiteren Raum einnehmen und wie schließlich das Vorweisen der Kongruenzsätze mittels oben genannter Bewegungen geführt wird. Absichtlich spreche ich hier von einem Vorweisen. Die logische Schärfe des Euklidischen Beweisens — das dort unmittelbar Zwingende — kann eben nicht Gegenstand eines ersten Geometrieunterrichtes sein[1]). Dem Umklappen schrieb man deshalb noch Bedeutung zu, weil es gestattete, den Raum in die Betrachtungen einzubeziehen. Damit werden wir zu dem zweiten Gesichtspunkte geführt, der die Anordnung des geometrischen Stoffes im Interesse der Förderung des räumlichen Anschauungs- und Vorstellungsvermögens verändern sollte. Es ist dies die Fusion von Planimetrie und Stereometrie.

Das Euklidische Lehrgebäude zeigt eine scharfe Trennung zwischen Raumgeometrie und ebener Geometrie, ferner ein Zurückschieben der Raumbetrachtungen an das Ende des Lehrganges. Treutlein, Klein, Höfler und Schimmack bemühten sich, diesen großen Vorzügen des ge-

1) Das im Euklidischen Aufbau ausschlaggebende rein Logische wird von geweckten Tertianern, die mit beiden Beweisarten vertraut gemacht werden, schon als viel zwingender empfunden. (Näheres darüber Seite 23).

rühmten logischen und systematischen Euklidischen Aufbaues mit aller Deutlichkeit die Nachteile eines solchen Unterrichtsverfahrens für jüngere Schüler entgegenzuhalten. In dem Habilitationsvortrage Schimmacks „Ueber die Verschmelzung verschiedener Zweige des mathematischen Unterrichts“[1]) wird erstens hervorgehoben, daß eine solche Trennung der Entwicklung der Raumanschauung hinderlich ist und daß zweitens diejenigen Schüler, die die Oberklassen nicht besuchen, völlig benachteiligt werden. Auf seinen langen praktischen Erfahrungen fußend, hat Treutlein dieses Problem in dem schon erwähnten Buche in Angriff genommen. Dort fordert er folgendes:

a) Der Geometrieunterricht unserer höheren Schulen muß in zwei Stufen erteilt werden, in einer Unterstufe und in einer Oberstufe.

b) Der Unterricht der Unterstufe ist ein geometrischer Anschauungsunterricht. Er lehnt sich an die Betrachtung von Körpern an, leitet die verschiedenen geometrischen Gebilde ab, formt sie etc.... Er benützt und fördert die Selbsttätigkeit der Schüler durch Schätzen, Messen, Zeichnen und Modellieren, er pflegt die innere Anschauung und die Raumvorstellung[2]).

c) Der Unterricht der Oberstufe verwertet die gewonnenen Anschauungen und stellt unter stetem Bezug der Betrachtung körperlicher Gebilde das Lehrgebäude der elementaren Geometrie auf als Muster einer deduktiven Wissenschaft.“

Bei oberflächlicher Betrachtung könnte man geneigt sein, zu sagen, daß also Treutlein für jene Trennung induktiv-deduktiv auftritt, die besonders in Frankreich[3]) zu finden ist und die als übertrieben wissenschaftlich bezeichnet worden ist. Diese Frage ist u. a. auch auf dem Kongreß der Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission in Cambridge 1912 zur Sprache gekommen, wo es dann hieß: „Im allgemeinen kann man sagen, daß in den teutonischen Ländern das Bestreben vorherrscht, die induktive und die deduktive Methode zu ver-

1) Berichte der Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission. Schimmack: Ueber die Verschmelzung verschiedener Zweige des mathematischen Unterrichts. Bd. 7.

2) Um recht deutlich zu machen, welch grundlegend andere Einstellung damit in der Folgezeit um sich greift, verweise ich auf Spiekers „Lehrbuch der ebenen Geometrie“, das im Gegensatz hierzu auf der ersten Seite schon folgende Bemerkung bringt: „Die Mathematik betrachtet nur die räumliche Ausdehnung der Körper, von den Stoffen, welcher sie erfüllt, absehend; sie betrachtet nur mathematische Körper, aber nicht physische.“ Was soll damit ein Quartaner, bei dem nach den damaligen Verhältnissen nichts zur Bildung der inneren Anschauung getan war, anfangen?

3) Besonders deutlich bei Enriques: Probleme der Wissenschaft. 1910.

mischen. Manche Leute halten den deutschen Lehrgang für unwissenschaftlich und schreiben den offenbaren Erfolg nur den ausgezeichnet ausgebildeten Lehrern zu, während andere die überkonzentrische Anordnung für übertrieben wissenschaftlich halten." Thaer griff damals klärend ein, indem er sagte: „Herr F. Klein hat in dem Einführungswort zu dem Buche des Herrn P. Treutlein jedes Mißverständnis über den deutschen Anschauungsunterricht durch folgende Worte auszuschließen versucht: „Der Kunst des Lehrers bleibt es überlassen, von den anschauungsmäßigen Elementen schon während des vorbereitenden Unterrichts allmählich zu der logischen Erfassung der Zusammenhänge überzuleiten, so daß nicht nur eine vorläufige Kenntnisnahme der grundlegenden räumlichen Vorstellungen, sondern unmittelbar eine tragfähige Grundlage für den höheren geometrischen Unterricht gewonnen ist, der, wie es Max Simon einmal ausdrückte, eine chemische Verbindung von Anschauung und Logik darstellen soll"[1] [2]).

Es läßt sich nicht leugnen, daß Treutlein und Höfler von allen um die Reform verdienten Mathematikern am entschiedensten dafür eintraten, daß der geometrische Anfangsunterricht als Wirklichkeitsunterricht derart beginnen müsse, daß die Schüler mit Hilfe aller Sinne — einschließlich des Tastsinnes — im Schätzen, Messen und Beschreiben räumlicher Gebilde geübt werden müssen. Weit mehr als Klein waren sie frei von jeder Meinung, als müsse in diesem Unterricht schon alles logisch definiert sein. So ist es auch gekommen, daß Treutlein in manchen seiner Forderungen über die Meraner Vorschläge hinausgegangen ist. Er hält z. B. einen geometrischen Vorkurs von einem Jahr für zu kurz und kann sich auch nicht damit einverstanden erklären, daß der Raum bei Einführung der Grundbegriffe vorwiegend als Träger planimetrischer Beziehungen erscheinen soll[3]). Für die Folgezeit setzte sich vor allem durch die Aktivität Kleins als ein erstes wichtiges Bildungsziel des geometrischen Unterrichtes durch:

1) Vgl. Lietzmann: Berichte und Mitteilungen veranlaßt durch die IMUK. 1917.

2) In seiner „Raumlehre in der deutschen Volksschule" entscheidet sich Drenckhahn weder für die experimentell-anschauliche noch für die logisch-deduktive Methode, sondern setzt dafür die intuitive. Bei aller Wertschätzung und Pflege, die die Intuition erfahren muß, sehe ich die großen Schwierigkeiten in der Kontrolle in einem Klassenunterricht — denn nicht alle Schüler werden im auffallenden Maße die Fähigkeit intuitiven Erkennens zeigen, d. h. bei sehr zusammengesetzten Vorstellungen alle in sie eingehenden Merkmale zugleich zu denken.

3) Treutlein: Der geometrische Anschauungsunterricht als Unterstufe eines zweistufigen Geometrieunterrichtes. 1911.

„Unter allseitiger Ausbildung des nervösen Apparates (Klein-Schimmack) und unter entsprechender Berücksichtigung äußerer Fertigkeiten soll auf natürlichem Wege das Anschauungsvermögen zum Vorstellungsvermögen entwickelt werden". Erst ein solches entwickeltes Vorstellungsvermögen hatte mit Recht der Ingenieur-Professor Riedler als die Grundlage jeder weiteren schaffenden Tätigkeit bezeichnet. Riedler war es auch, der schon damals darauf hinwies, daß der herrschende Unterricht in der Geometrie mit der Stereometrie als Anhängsel ungefähr das Gegenteil davon war, was für die Ausbildung der Raumanschauung geleistet werden konnte. Er war eine Linienkombination[1]).

Zwei ernst zu nehmende Einwände sind mir ferner dahingehend begegnet, daß erstens in der Fusion von ebener und Raumgeometrie das Hineintragen eines Erwachsenenstandpunktes in den Unterricht liegt, während gerade Euklid mit der psychologischen Wirklichkeit der Ebene arbeitet und darin kindesgemäßer ist, und daß zweitens nach der Behandlung räumlicher Gebilde im propädeutischen Vorkurs letztere im weiteren Verlaufe doch nur mehr oder weniger künstlich herangezogen werden. Während nun ein Blick in die Lehrbücher dem letztgenannten Einwande recht gibt, sei hinsichtlich des ersteren auf die psychologischen Untersuchungen von Katz[2]) verwiesen, die ihn zu der Erkenntnis führen, daß die Raumwahrnehmungen des Kindes nicht flächenhaft, sondern mehr raumhaft sind, und daß ferner an Körpern die ersten geometrischen Erfahrungen gesammelt werden und in geringerem Maße an Flächen und Linien. Man wollte eben durch eine frühzeitige Fusion der Gefahr entgegenarbeiten, daß die Schüler in einseitiger Weise an die Ebene gewöhnt wurden und bei späteren stereometrischen, astronomischen etc. Betrachtungen nicht fähig waren, sich räumliche Gebilde und ihre Durchdringung vorzustellen.

In den neueren Lehrbüchern sind diese Gesichtspunkte in der Folgezeit weitgehend berücksichtigt worden, desgleichen ist den hier aufgezeigten Bestrebungen in den 1925 erschienenen Richtlinien für die Lehrpläne der höheren Schulen Preußens voll Rechnung getragen worden. Die Ausbildung der Raumanschauung wird in den Vordergrund gerückt.

---

1) Siehe die Ausführungen über Infinitesimalrechnung Seite 37 unten!

2) Katz in „Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland" von Klein 1910—1916.

Die gesamte darstellende Geometrie ist aus diesem Grunde in den matematischen Unterricht der höheren Schulen eingegliedert worden. Im Interesse einer harmonischen Ausbildung erhoffte man von ihr eine wertvolle Unterstützung in der Entwicklung des räumlichen Vorstellens, wobei methodisch der Weg von Scheffers und Kramer[1]) angenommen wurde. Die starke Betonung, die die darstellende Geometrie[2]) erfahren sollte, ist meines Erachtens nicht nur in der Notwendigkeit begründet, bei der zeichnerischen Durchführung räumlicher Konstruktionen Körper auf eine Ebene abbilden zu müssen, sondern vor allem auch darin, daß sie zu einem wesentlichen Teile in den von Klein verwendeten geometrischen Transformationen analytisch mit erfaßt war[3]). Es ist dann in der Folgezeit tatsächlich zu beobachten, daß der aus rein geometrischem Geiste entstandene Abbildungsgedanke, mit dem man durch Verfolgung der aufsteigenden Linie metrisch-ähnlich affin-projektiv dem Geometrieunterricht einen Gesichtspunkt von ähnlicher Tragweite überordnen konnte, wie es der Funktionsbegriff für die Analysis ist — vielfach in seiner symbolischen Erfassung[4]) für wichtiger gehalten wird als in seiner rein geometrischen Bedeutung[5]).

Es muß an dieser Stelle noch betont werden, daß für kein anderes Gebiet die Diskrepanz zwischen Forderung und Möglichkeit der Erfüllung auf Grund der zur Verfügung gestellten Zeit größer gewesen ist als gerade für die darstellende Geometrie. Es muß andererseits auch festgestellt werden, daß das beste Hilfsmittel zur Stärkung des räumlichen Vorstellungsvermögens ein in Verbindung mit der Geometrie durchgeführter darstellend geometrischer Unterricht ist, in dem gerade die ebene Zeichnung körperlicher Gebilde die Hauptsache ist[6]).

Das in den Richtlinien betonte Gebiet der symmetrischen Verknüpfungen und der Drehung, Verschiebung und Umklappens ist als ein Ueber-

1) Scheffers und Kramer: Leitfaden der darstellenden und räumlichen Geometrie. 1924.

2) Ferner Zühlke: Der Unterricht in Linearzeichnen und in der darstellenden Geometrie an den deutschen Realanstalten in Kleins Abhandlungen. 1910—1916.

3) Klein: Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. 1925.

4) Wie wenig jugendgemäß bei aller gewollten Lebensnähe es ist, den gesamten geometrischen Stoff von Anfang an dem symbolisch durchgearbeiteten Gruppen- und Abbildungsgedanken unterzuordnen und das anschauliche Substrat nur dazu zu benutzen, diesen Gedanken genetisch an den Schüler heranzubringen, zeigt ein Blick in das Behrens-Morgensternsche Lehrbuch: Form und Abbildung.

5) Klein: Elementarm. v. h. Stdp. 1925. Dreetz: Gruppenbegriff und Abbildung im mathematischen Unterricht. Zeitschr. f. m. n. U. 65. Jg. 1935.

6) Dieck: Stoffauswahl und Lehrkunst im math. Unterricht. 1918.

gangsgebiet zu werten. Bei der Entwicklung des Raumanschauungsvermögens zum Raumvorstellungsvermögen ist es förderlich, jedoch auch nur dann, wenn sein bildender Wert nicht überschätzt wird.

Es ist mir hier der Einwand begegnet, daß diesem Verknüpfen etwas durchaus Rationales anhaftet. Der Einwand ist berechtigt, denn symbolisch erfaßt, liefert es den sehr abstrakten Gruppenbegriff. Wohl kann man feststellen, daß die Schüler dieser Altersstufe des öftern das Verlangen haben, sich Klarheit über das Verhalten spiegelbildlicher Gebilde zu verschaffen, jedoch entspringt es einer durchaus gedankenspielerischen Einstellung, wenn man zuviel Zeit des ersten Geometrieunterrichtes dazu verwendet, symmetrische Konstruktionen auf verschiedensten Wegen unter dauernder Ausnutzung aller in der Gruppe erfaßten Bewegungen und unter weitgehendster Benutzung ungünstiger Lagebeziehungen durchzuführen.

Obige Reformforderung hat ihren Platz im Geometrieunterricht mit Rücksicht auf die geistige Entwicklung des Kindes, dem im Alter von 10—13 Jahren nicht zugemutet werden kann, von der empirischen Stufe des Kenntnisnehmens und der ersten mathematischen Einsichten zu den tieferen mathematischen Einsichten zu folgen. Neben dem soeben immer wieder hervorgehobenen inhaltlichen Bildungswerte wird aber der Geometrieunterricht der Mittelstufe erst dann einen weiteren bildenden Wert entfalten, wenn an Euklidischer Geometrie das Selbstvertrauen der Schüler zum eigenen Verstand und ihre kritische Urteilskraft[1]) geweckt wird.

„Möge man", so äußerte sich Lindemann[2]) mit Recht, „daher für die Anfänger noch weiter als bisher von Euklid abweichen; auf einer späteren Stufe muß man zu ihm zurückkehren, wenn der Schüler wirklichen Einblick in ein wissenschaftliches System gewinnen soll. Bekannt ist Euklids Ausspruch gegnüber dem König Ptolemäus: „Es gibt keinen Königsweg zur Mathematik". Um die Mitte des vergangenen Jahrhunderts glaubte man einen solchen in der sogenannten neueren Geometrie gefunden zu haben; ich selbst war ein begeisterter Anhänger dieser Auffassung, habe sie aber vollkommen aufgegeben. Je mehr man sich in das einzigartige Buch, das über zwei Jahrtausende das Lehrbuch von

1) Vgl. auch Voß: Die Beziehungen der Mathematik zur allgemeinen Kultur. (Die Kultur der Gegenwart) 1914.

2) Lindemann: „Lehren und Lernen in der Mathematik", Rede beim Antritt des Rektorats der Ludwig Maximilians Universität München 1904.

jung und alt gewesen ist, vertieft, desto mehr erkennt man die innere Notwendigkeit seines Verfahrens und seines Aufbaus; und manche Lücken, die man bei ihm hat nachweisen wollen, werden als nur scheinbare erkannt, wenn man sich wirklich in den antiken Geist der reinsten Geometrie hineinzuleben vermag, welcher alles Rechnen und jede uns heute so geläufige Verbindung zwischen Zahlen und geometrischen Figuren vollkommen fernlag....."

Die vielfachen Angriffe unter dem Schlagwort „Los von Euklid", „Weg mit Euklidischer Starre" entsprangen wohl wertvollen Erkenntnissen der Jugendpsychologie, vielleicht auch der Erkenntnis, daß die statische Denkweise Euklids allein den Anforderungen der Neuzeit nicht mehr genügte — sie waren jedoch ebenso einseitig darin, daß sie alles mit dynamischer Denkweise durchsetzen wollten. Tief kraftbildend hinsichtlich des Gefühles für etwaige Unvollkommenheit der in Betracht kommenden Bestimmungen wie für die Ueberbestimmung und für die gegenseitige Verträglichkeit der vorkommenden Bedingungen[1]) ist die Euklidische Geometrie. Ihre Vorbildlichkeit in der Trennung zwischen Datum und Beweis hatte auch schon Doehlemann hervorgehoben. Es ist ein Mangel, wenn der Schüler auf der Mittelstufe nur unvollkommen damit vertraut gemacht wird. Der noch zu besprechende andere, äußerst wertvolle inhaltliche Bildungswert, die Pflege des funktionalen Anschauens, kann deshalb ununterbrochen gerade in der Geometrie zur Geltung kommen, ja er tritt vielleicht dann um so klarer und schärfer hervor.

Nicht richtig ist es, wenn wertvolle Zeit des Geomtrieunterrichtes der Mittelstufe dazu benutzt wird, bereits systematisch das Rüstzeug für die Steinersche Richtung der neueren Geometrie zu sammeln, einfaches und Doppel-Verhältnis, die einzig invarianten Maßgrößen der affinen, bzw. projektiven Geometrie eingehend zu behandeln. — Zurücktreten können ferner die indirekten Beweise und eine Reihe von Umkehrungssätzen.

Die schon angedeutete Vorliebe Kleins, auch bei der Behandlung rein geometrischer Fragen stets die analytische, rechnerische Behandlung voranzustellen, da sie ihm jederzeit den genauesten Ausdruck der Tatsachen

1) F. Pietzker: Ueber den wissenschaftlichen Charakter im elementaren Mathematikunterricht. Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften 1910.

gestattet, hat im Geometrieunterricht der oberen Klassen dazu beigetragen, daß der Descartesschen Richtung der Vorzug vor der rein geometrischen Desarguesschen-Leibnizschen Richtung gegeben wurde. So tritt hier als ein neues Problem auf, in welcher Form sich nun das Gleichgewicht zwischen diesen beiden neuen geometrischen Denkrichtungen des 17. Jahrhunderts und der Euklidischen Richtung einstellen sollte. Die Zeit — und auch Klein stand mitten in seiner Zeit — hat bewirkt, daß im allgemeinen der analytischen Methode Descartes' in Verbindung mit der noch zu erwähnenden empiristischen Methode deshalb der Vorzug gegeben wurde, weil sie sich als diejenigen erwiesen, die gestatteten, Raum und Materie weitgehend rechnerisch zu erfassen und die sogenannte objektive Naturwissenschaft zu großer Höhe zu bringen. In demselben Maße, in dem die Zahl weitgehend Eingang auch ins geometrische Denken findet, geht die Auffassung einer echten Anschauung verloren. Zwar erwies sich die Descartessche Fusion zwischen zwei in ihren Fundamenten grundverschiedenen Gebieten[1]) außerordentlich fruchtbar, aber in dem Grade, in dem dabei die Zahl sich in den Vordergrund drängt, in dem speziell im Unterricht eine ausgesprochen rechnerische Gestaltung Platz greift, gewinnt in jenem noch zu erörternden Verhältnis von Anschauung und Denken das rein abstrakte Denken die Oberhand. In diesem Augenblicke gehen von den in der Anschauung wirksamen Faktoren: dem Gesichtssinn, dem Tastsinn und den in der Wahrnehmung arbeitenden konstruktiven Elementen des Denkens[2]) die beiden ersten verloren, und die Gefahr, daß nicht einmal mehr mit richtigen Prämissen gearbeitet wird, ist groß. Wenn sich so die Abstraktion von der Anschauung mehr und mehr entfernt und die beide verknüpfenden Fäden geringer werden, wird auch das Denken von seinen fruchtbaren Wurzeln losgelöst werden. Unter diesem Gesichtspunkt hat kürzlich die Mathematik und Naturwissenschaft — gedacht ist dabei wohl in erster Linie an gewisse ausgesprochene nominalistische Strömungen des Hochschulunterrichts, hinter denen die Schule diesmal dank der ihr innewohnenden Trägheit nachhinkte — von philosophischer Seite Angriffe in folgender Form erfahren: „Es ist richtig, daß das Zahlenprinzip weiter reicht als die räumliche Anschauung, aber es ist schlechthin eine Entartung des Denkens, wenn es auf die räumliche Anschauung verzichtet und sich grundsätzlich mit der Zahl

1) Lambeck: Philosophische Propädeutik. 1924.
2) Natorp: Allgemeine Pädagogik in Leitsätzen zu akademischen Vorlesungen. 1905.

begnügt. Das ist der entscheidende Schritt zu Relativismus und Auflösung“[1]).

Was ist das Andersartige der Desarguesschen Richtung? Desargues sieht seine wichtigste Aufgabe in der zeichnerischen Darstellung von Körpern. Von ihm zuerst verwendet — von Monge, und besonders auch von Leibniz als Beweisvorgang anerkannt — wird das Projizieren, das Abbilden von Figuren als Forschungsprinzip in die Geometrie eingeführt. Das von Leibniz in diesem Zusammenhange viel erörterte Gesetz der Kontinuität trägt einem deutschen Wesenszuge Rechnung, indem dort das Stetige im Gegensatz zum Sprunghaften im Reiche der Zahl im Mittelpunkt steht. Für ihn hat ja dieses Gesetz über den Kreis des Mathematischen hinaus Geltung für sein gesamtes Weltbild erlangt[2]).

Wie schon angedeutet, werden die Figuren in dieser Gometrie kinematisch gedacht. Ebene und Raum sind eng verknüpft, und die Ausbildung der Raumanschauung ist unerläßlich. Wichtig ist, daß bei diesem aus rein geometrischem Geiste entstandenen Aufbau das anschauliche Erfassen und nicht immer die strengste Logik oft weiterführt. Wichtig ist aber auch, daß es in diesem Aufbau möglich ist, ohne Verwendung der Rechnung die Probleme allgemein anzufassen. (Unendlich ferne Elemente, das Imaginäre.)[3])

In der Vorgeschichte der Reformbewegung leuchtet der Streit zwischen Descartesscher Richtung und neuerer Geometrie heftig auf, als z. B. 1889 Kleiber[4]) fordert, Kettenbrüche, Diophantische Gleichungen und binomischen Lehrsatz als verbindlich fallen zu lassen, dafür aber die analytische Geometrie der Kegelschnitte einzuführen: „Wenn Schlegel sagt: „Es könnte in Verwunderung setzen, daß die gewaltigen Reformen Steiners ganz spurlos an dem auf der Schule behandelten Stoffe vorüberge-

1) Hildebrandt: Positivismus und Natur. Zeitschrift für die gesamte Naturwissenschaft. Heft 1/2, 1935.

2) Leibnitz: Hauptschriften zur Grundlegung der Philosophie „Ueber das Kontinuitätsprinzip“. 1904.

3) Auf Einzelheiten kann im Rahmen dieser Ausführungen nicht eingegangen werden. Eine recht übersichtliche Einführung in die Entwicklung der projektiven Geometrie hat Zacharias in einem Bändchen der Math.-Phys. Bibliothek gegeben. 1930. Vgl. auch Klein: Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert. 1926. Vgl. die außerordentlich übersichtlichen Ausführungen von Wolff: Die Entwicklung der Abbildungsidee in Wissenschaft und Schule. Unterrichtsblätter des deutschen Förderungsvereins. 1933.

4) Klein: Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland. 1910—1916.

gangen sind, so möchte Referent außer demjenigen, was Reidt darüber sagt, erwidern: „Noch viel mehr könnte es in Verwunderung setzen, daß der gewaltige Gedanke des Cartesius, die große Kluft zwischen diskontinuierlichen und kontinuierlichen Größen zu überbrücken, dieser Gedanke, den die größten griechischen Mathematiker niemals zu fassen vermochten, der seit 2½ Jahrhunderten auf allen Gebieten der Mathematik und Physik befruchtend und vertiefend wirkte, daß dieser Gedanke unseren Schülern niemals auch nur gedämmert haben sollte."

Die Entwicklung ist dann so gegangen, daß sich die Fusion beider Richtungen im mathematischen Unterricht durchgesetzt hat. Dort jedoch, wo man sich mit Rücksicht auf die Zeitfrage nur für eine Richtung entscheiden mußte, geschah es zugunsten der analytischen. Detlefs[1]) wies 1923 auf die Gefahr hin, die eine allzu rechnerische Gestaltung des mathematischen Unterrichtes in sich barg. Man darf m. E. — wie es vielfach geschehen ist — den bildenden Wert der analytischen, rechnerischen Behandlung nicht zu hoch einschätzen. In den folgenden Sätzen Pringsheims[2]) liegt ein Gefahrenpunkt, der durchaus auch den mathematischen Unterricht betrifft: „Daß der Mathematiker, solange er rechnet, dem kausalen Zusammenhange eines Vorganges mehr oder weniger entfremdet ist, darf zugegeben werden; liegt doch gerade darin die erstaunliche Kraft der Analysis, daß die ihr eigentümliche Zeichensprache gestattet, verwickelte Zeichenoperationen zu ersetzen, ohne daß derjenige, welcher sich ihrer zu bedienen versteht, genötigt ist, den gedanklichen Inhalt dieser Operationen immer wieder in allen Einzelheiten nachzuprüfen... Wesentlich ist eben nur, daß jede analytische Zeichenoperation in ihrer Anwendung auf Größenbeziehungen einen bestimmten Gedankeninhalt repräsentiert und daß zwar nicht das Rechnen an sich, d. h. das mechanische Operieren mit gewissen Symbolen, wohl aber die Auflösung jener Operationen in ihren Gedankeninhalt auch wirkliche Einsicht in das Zustandekommen des Endergebnisses verschafft . . ."

Bei verfrühter und zu betonter analytischer Behandlung liegt eben die Gefahr sehr nahe, daß solche gedanklichen Inhalte nicht mehr repräsentiert werden, sondern auch weniger denkende Schüler mit einem gewissen mechanischen Operieren durchkommen.

1) Reinhard-Zeisberg: Mathematisches Unterrichtswerk. Ausgabe A, 4. Bd. 1934.
2) Alfred Pringsheim: „Ueber Wert und angeblichen Unwert der Mathematik." Festrede gehalten in der öffentlichen Sitzung der K. B. Akademie der Wissenschaften zu München 1904.

Den bisherigen Ausführungen liegen noch zwei weitere Probleme, zwei wesentlich verschiedene Verhältnisse von Anschauung und Denken zugrunde, hinsichtlich denen die Richtlinien für die Lehrpläne der höheren Schulen Preußens (entsprechend ihrem Charakter als Richtlinien) einen kinetischen Gleichgewichtszustand derart darstellen, daß sowohl denjenigen Lehrern, die das anschaulich-konstruktive Element in den Vordergrund stellen als auch jenen, die das abstrakt-logische mit Vorliebe betonen, volle Entwicklungsmöglichkeit gegeben war. Einmal wird dem Denken ein wesentlich höherer Realitätsbereich zugestanden als der Wirklichkeit. So gesehen wird die echte Anschauung, die gerade für den Jugendlichen die Quelle echter Erkenntnis ist, sehr gering gewertet. Dieses Verhältnis stellt sich dann sehr leicht ein, wenn sich auf dem eben geschilderten Umwege über die Zahl, über eine ausgesprochen rechnerische Gestaltung des mathematischen Unterrichtes, das abstrakte Denken in den Vordergrund schiebt. Im andern Falle wird die Fragestellung aus der Wirklichkeit, die nicht in niederer Rangordnung steht, empfangen, und die Abstraktion als ein Mittel, letztere zu meistern, gewertet. Stoffgebiete wie Trigonometrie, Geodäsie, mathematische Erdkunde und Astronomie — aus denen auch Karl Friedrich Gauß rein experimentell die Fragestellung zu seinen Arbeiten erhielt — können im letzteren Falle als Ausgangspunkt dienen. Die Richtlinien betonen sie in folgender Form: „Mathematische Geographie, Astronomie und Geodäsie werden der Mathematik überlassen. Die aus diesen Gebieten entnommenen mathematischen Stoffe sind auch der Pflege des Heimatgedankens dienstbar zu machen." Das Schöpferische einer derartigen Einstellung der Mathematik gegenüber hat Klein treffend charakterisiert: „Es ist ebenso für Gauß persönlich wie für die in seiner Zeit lebendige Auffassung der Wissenschaft, die noch keine trennende Scheidewand zwischen praktischem Bedürfnis und rein theoretischem Schaffensdrange aufgerichtet hatte[1]), durchaus kennzeichnend, daß die umfassenden, auch in rein mathematischer Hinsicht äußerst fruchtbaren Arbeiten über diese beiden Probleme (gemeint: Bahnbestimmung der Ceres und Berechnung der Pallasstörungen) sich unmittelbar an äußere praktische Anlässe anschließen." Abstraktes Denken bedeutet

1) Diese trennende Scheidewand zu beseitigen, hatte Klein sich eifrig bemüht. Es ist ihm, im Grunde genommen, nur durch seine Persönlichkeit gelungen, und nach der Zeit seines Wirkens war der Auseinanderfall nicht mehr aufzuhalten. Der Grund dafür liegt in der in diesem Kapitel geschilderten Entwicklung, die das Denken genommen hat.

eben nicht eine Abkehr von der Wirklichkeit, es bedeutet die Beherrschung der Wirklichkeit durch die Kraft des Geistes[1]), und in den aus einer solchen Einstellung heraus durchgeführten Rechnungen sieht der Jugendliche einen ganz andern Sinn. Erst in einem solchen Unterrichte werden die wertvollsten ethischen Kräfte geweckt werden, nämlich die Energie zur Ueberwindung anscheinend hoffnungsloser Schwierigkeiten, ein beharrlich auf das Ziel gerichteter Wille und das Selbstvertrauen auf die eigene Kraft. Der Jugendliche, der in natürlicher Einstellung die Abstraktion als ein Kampfmittel wertet, kann aus oben genannten Gebieten, zumal wenn ein Teil der Aufgaben sich aus praktisch durchgeführten Vermessungen ergibt, wertvollste Anregungen erhalten. Wenn angesichts der Entartung und des Geisteshochmutes, den eine einseitige Hochschätzung des rein abstrakten Denkens zeitigt, gerade diesem Gesichtspunkte besondere Aufmerksamkeit zukommen muß, so soll an die wertvollen Erfahrungen, die in dieser Richtung schon in den ersten Jahren der Reform gesammelt sind, erinnert werden.. 1912 konnte Smith in Anlehnung an Feststellungen Lietzmanns[2]) auf dem Internationalen Mathematikerkongreß in Cambridge über Deutschland berichten: „Sehr viel Feldmeßarbeit wird in Geometrie und Trigonometrie getrieben, so werden Höhen und Entfernungen gemessen, wobei die Schüler selbst die Instrumente gebrauchen. Was die praktischen Uebungen in der Astronomie angeht, so wird in den deutschen Schulen anerkannt, daß sie ausführbar und wünschenswert sind. Nicht wenige Anstalten in Preußen haben Fernrohre . . ." In diesem Zusammenhang verdient besonders die Aeußerung Erwähnung, daß durch derartige — wenn auch oft rohe Messungen — dem Hochmut entgegengearbeitet wird, mit dem der Schüler auf alle unmittelbare Anschauung herabblickt. Der Kampf mit der Wirklichkeit und die Einsicht in die Grenzen der Genauigkeit solcher Rechnungen, die mit Messungen zusammenhängen, zeigen ja dem Schüler am deutlichsten, wie unbegründet ein solcher Hochmut ist. Es ist nicht zu leugnen, daß die Verlegung eines Teiles des Geometrieunterrichtes ins Freie auch heute noch mit denselben

---

1) Vgl. auch Timerding: Die Verbreitung mathematischen Wissens und mathematischer Auffassung. (Die Kultur der Gegenwart) 1914.

2) Lietzmann: Berichte und Mitteilungen, veranlaßt durch die IMUK. 1917.

Vgl. auch die zahlreichen IMUK-Abhandlungen von Wienleitner, Geck, Kramer, Wirz, Thaer, Geuther, Böttger, Hoffmann.

Schwierigkeiten zu kämpfen hat, wie sie damals schon Höfler hervorhob. Wenigstens sind hier Großstadtschulen gegenüber Schulen in ländlicher Umgebung stark benachteiligt.

Schließlich sollen noch zwei Gebiete Erwähnung finden, die an die Abstraktionsfähigkeit starke Anforderungen stellen und hinsichtlich derer die Versuche einer unterrichtlichen Behandlung nach wie vor der Reform nicht geruht haben. Es sind die Axiomatik und die Nichteuklidische Geometrie. Die rein mathematische, von philosophischen Gedankengängen losgelöste Behandlung der Nichteuklidischen Geometrie bei Klein, die Krönung der Axiomatik in Hilberts Grundlagen der Geometrie 1913 und die häufige Meinung, daß ein abgerundetes naturwissenschaftliches Weltbild nicht ohne die Kenntnis des gekrümmten Einsteinschen Raumes möglich wäre, waren die Anlässe zu diesen wiederholten Versuchen.

Klein selbst warnt dringend, wie er es 1904 schon in Breslau[1]) getan hatte, davor, „im regulären Schulunterricht Nichteuklidische Geometrie zu bringen, wie das Enthusiasten immer wieder empfehlen. Wir wollen zufrieden sein . . . , wenn die Schüler die Euklidische Geometrie wirklich verstehen lernen."

Die rein mathematische, aber keineswegs nominalistische Auffassung der Nichteuklidischen Geometrie[2]), bei Klein verlangt ein sehr hohes Maß von Abstraktionsfähigkeit, das den Jugendlichen nicht zugemutet werden darf. Alle Bemühungen, unter weitgehender Veranschaulichung dieses Gebiet dem Schüler näherzubringen, zeigen stets nur die Diskrepanz einer unbefangenen Anschauung seitens des Jugendlichen einerseits und einer dazu notwendigen hochentwickelten Abstraktionsfähigkeit anderseits, die nun rückwärts mit Hilfe der Veranschaulichung dem Schüler näherkommen will. Unter diesem Gesichtspunkt habe ich in die erst kürzlich wieder aufgelebte Debatte in den Unterrichtsblättern für Mathematik und

---

1) Gutzmer: Die Tätigkeit der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Aerzte 1908.

2) Klein: Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. 1925.

Klein: Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen (Erlanger Programm). Mathem. Analen Bd. 43. 1893.

Während in ersterer Kleins empiristische Auffassung der Nichteuklidischen Geometrie zum Ausdruck kommt — wobei er im Gegensatz zu der orthodoxen Auffassung Kants die Axiome nicht als unmittelbare Tatsachen der Anschauung, wohl aber als zweckmäßig gewählte Idealisierung dieser Tatsachen gelten läßt — tritt in den vergleichenden Betrachtungen eine Auffassung der Nichteuklidischen Geometrie hervor, die dem reinen Denken ihr Dasein verdankt, die rein logistisch ist.

Naturwissenschaften[1]) eingegriffen. In meinen dortigen Ausführungen sollte diese Diskrepanz dadurch deutlich gemacht werden, daß in einer Nichteuklidischen Geometrie der reziproken Radien das Grundelement — die Gerade — umgedeutet war, und daß diese formale Umdeutung im Gebiete des reinen Denkens trotz weitgehendster Veranschaulichung dem Jugendlichen nicht faßbar ist, da er die im folgenden geschilderte Einstellung diesem Gebiete gegenüber hat. Frei von allem Gedankenspiel möchte er die Frage, welche Geometrie die wirkliche ist, durch das Experiment entschieden wissen — eine Einstellung, unter der übrigens auch Gauß dieses damals neue Gebiet betrat.

Diese mit Absicht an den Schluß dieses Kapitels gesetzten Ausführungen über die Nichteuklidische Geometrie zeigen vielleicht am deutlichsten, in welchem Sinne sich das Verhältnis von Anschauung und Denken verschoben hatte. Unter diesem Gesichtspunkte waren die Feststellungen Doehlemanns 1913 in seinen Ausführungen über „den Bildungswert der reinen Mathematik"[2]) recht erfrischend: „Die Nichteuklidischen Geometrieen sind als ein Triumph der strengsten Logik von dem allergrößten Interesse, aber sie bleiben bloß ein Werk der Phantasie. . . ."

Es kann in diesem Zusammenhange die erkenntnistheoretische Frage von Euklidischer und Nichteuklidischer Geometrie nicht eingehender behandelt werden; sie wäre angesichts des Weges, den die Mathematik und besonders auch die Physik hat gehen müssen, und auf dem man sich nun zu mehr oder weniger bescheidener Umkehr bemüht, eine sehr dankbare. Wichtig in diesem Zusammenhange ist, daß derartig abschließende Betrachtungen für den Jugendlichen wenig bildenden Wert haben, da sie nicht geeignet sind, in ihm das Gefühl des Zurückschauens auf ein durchwandertes Gebiet von erreichter Höhe zu geben, sondern vielmehr in ihm das Gefühl einer gewissen Unsicherheit, oft sogar mathematischer Unbegabtheit aufkommen lassen. Warum will man auch, während man für den Anfangsunterricht in manchmal übertriebener Weise die psychologischen Rücksichten deutlich machte, hier nun den rein formalen und stofflichen Standpunkt betonen?

Auf größeres Interesse und Verständnis dagegen dürfte die Forderung

1) K. Pietzker: „Nichteuklidische Geometrie im mathematischen Unterricht?" Unterrichtsblätter des Förderungsvereins. Jahrg. 41, Heft 3. 1935.

2) Doehlemann: „Ueber den Bildungswert der reinen Mathematik". Unterrichtsblätter des Förderungsvereins 19. Jahrg. Nr. 4. 1913.

der Richtlinien stoßen: „Auch die psychologischen Grundlagen des mathematischen Denkens soll der Unterricht berühren. Einzelfragen, wie Zahlen- und Raumvorstellungen, sind nach Möglichkeit philosophisch zu vertiefen."

Die Meraner Vorschläge und der wissenschaftliche Charakter des mathematischen Unterrichtes unter besonderer Berücksichtigung der Gebiete, die vorwiegend auf der Zahl aufbauen.

Nunmehr wende ich mich den Gebieten zu, die auf der Zahl aufbauen, und die, je weiter der Schüler in sie hineinwächst, an das Abstraktionsvermögen außerordentlich hohe Anforderungen stellen. Sie bilden diejenige Stufe im Bildungswerte der Mathematik, welche weit über die Anschauung hinausführt und die, falls sie nicht konkret in Angriff genommen wird, bei vielen durchaus mathematisch veranlagten Schülern der Grund zur gänzlichen Mißachtung der Mathematik werden kann[1]). Fast mehr noch als für den Geometrieunterricht muß gerade hier vor Augen gehalten werden, daß sich beim Kinde die Fähigkeit, mathematische logische Schlüsse zu bilden, weit später ausbildet als die Anschauung.

Das tägliche Leben verlangt bereits vom Kinde zeitig eine gewisse Schulung in der richtigen Auffassung von Größenwerten, das Vertrautsein mit bestimmten Zahlen, gewisse Rechenfertigkeiten und deren Anwendung im bürgerlichen Leben. Diese Forderungen hat, wie auch die Richtlinien für die Lehrpläne an den höheren Schulen[2]) zum Ausdruck bringen, der Rechenunterricht zu erfüllen.

Im Verlaufe der Reformbestrebungen treten hier zwei Strömungen immer deutlicher hervor, die vielleicht in etwas scharfer Form, wie folgt, gegenüber gestellt werden können. Die eine Richtung pflegt eine ausgiebige Konkretisierung der Zahl und hält jeden — besonders durch vorzeitige Verwendung von Buchstaben — sich leicht einschleichenden Formalismus fern. Die Vertreter der anderen Richtung wollen den Rechenunterricht als engste Vorstufe des Arithmetikunterrichtes aufgefaßt wissen und bereits hier die Wissenschaftlichkeit recht weit treiben. Eine glück-

1) Doehlemann: Ueber den Bildungswert der reinen Mathematik. Unterrichtsblätter. 1913.
2) Richtlinien für die Lehrpläne der höheren Schulen Preußens. 1927.

liche Verschmelzung beider Standpunkte hat z. B. in dem Hofmannschen Rechenwerk, das im Rahmen des Reinhardt-Zeisbergschen Unterrichtswerkes erschienen ist, ihren Niederschlag gefunden. Kindes- und Lebensnähe sind erreicht worden, und anderseits ist eine genügende Grundlage für den Arithmetikunterricht geschaffen worden. Die Hinwendung von der Form zum Inhalt ist hier völlig ungekünstelt durchgeführt worden. Hat doch gerade der Rechenunterricht die beste Möglichkeit, den Schüler mit der engeren Heimat weitgehendst zu verwurzeln — eine Forderung, die bereits die Richtlinien[1]) deutlich zum Ausdruck bringen, die aber dort, wo jene noch näher zu erörternde Wissenschaftlichkeit als wertvoller erachtet wurde und wo bereits der Geist des Kindes einer erheblichen, kraftverbrauchenden Gymnastik unterzogen werden sollte, unbeachtet blieb.

Ein lebensfeindlicher Verbalismus ist in dem genannten Rechenbuch z. B. dadurch vermieden, daß die sonst fast wissenschaftlich durchgeführte Trennung von benannten und unbenannten Zahlen nicht befolgt ist. Diese und die weiteren methodischen Einzelheiten sind absichtlich berührt, da an sie bei den folgenden eingehenden Erörterungen über den zunehmenden wissenschaftlichen Charakter des mathematischen Unterrichtes gedacht werden soll.

Der Uebergang zur Buchstabenrechnung und besonders die Einführung der relativen Zahlen sind Punkte, an denen sich im Schulunterricht wiederum die pädagogisch orientierten Richtungen von den wissenschaftlich orientierten deutlich scheiden. Während die Vertreter der ersteren die Schüler durch Umgang mit den Dingen vertraut machen, bevorzugen letztere möglichst vorangestellte Definitionen[2]) und sehen — vor allem infolge einer kritiklosen Uebernahme der Kleinschen Ausführungen in seiner Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus — gerade bei Einführung der relativen Zahlen eine Hinwendung von inhaltlicher zu formaler Mathematik. Diese von Klein selbst gemachten Aeußerungen[3])

---

1) Vgl. Richtlinien: „Angewandte Aufgaben sollen der Wirklichkeit entnommen sein und zu praktisch wertvollen Ergebnissen führen.... In den Anwendungen ist engste Verknüpfung mit der Heimatkunde anzustreben."

2) Diese Kernfrage hat auch O. Zander an konkreten Beispielen erörtert. Vgl. Zander: Definitionen, Unterrichtsblätter. 1935.

Gerade an diesem Kernpunkte konnte auch im Schulunterricht der Positivismus spürbar werden.

3) Klein: Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. 1925.

verraten deutlich einen wissenschaftlichen, innerlich systematischen Standpunkt — niemals aber einen pädagogischen. Während die Meraner Vorschläge eine Hinwendung von der Form zum Inhalt fordern, ist hier — und diesmal aber auch im Anschluß an Klein! — ein besonderes Einfallstor gegeben, im mathematischen Unterricht wertvolle Zeit für einen Aufbau des Zahlenbereichs zu verwenden, der der Ausdruck reinsten, durch keine realen Umstände gestörten Denkens ist und für dessen Dasein der Schüler doch nur wenig Verständnis haben kann. Ueber diese Schwierigkeiten bringen auch weitgehende Veranschaulichungen auf cartesischer Zahlengeraden und in Gaußscher Zahlenebene nicht hinweg.

Hier hat deutlich das Hineintragen eines Erwachsenenstandpunktes in den Unterricht vorgelegen, in dessen Dienst dann die Veranschaulichung vielfach mißbraucht worden ist. Von demjenigen, der den Stoff beherrscht, werden diese Veranschaulichungen mit Recht als unterstützende Erleichterung angesehen. Anders jedoch verhält es sich vom Schüler aus betrachtet. Er soll ja erst in diese Gebiete hineinwachsen und würde sie auf diesem Wege nur einseitig kennen lernen, ohne den tieferen Sinn zu erfassen. Solche Bemühungen bleiben ohne bildende Bereicherung für den Schüler. So gesehen, ist es zu begrüßen, daß wiederholt gerade jetzt die Forderung gestellt wird[1]), von einer Erweiterung des Zahlenbereiches durch Einführung der Gaußschen Zahlenebene auf der Schule — wie sie oft durchgeführt worden ist — Abstand zu nehmen — eine Forderung, die bereits F. Pietzker in seinen Ausführungen „Ueber den wissenschaftlichen Charakter im elementaren Mathematikunterricht"[2]) gemacht hat. —

Einige Stellen dieser Ausführungen müssen im Rahmen dieser Betrachtungen Berücksichtigung finden, da sie die ganze Meraner Reform unter einem ernst zu nehmenden Gesichtspunkte beleuchten — einem Gesichtspunkte, dem die letzte Entwicklung durchaus zugestimmt hat. U. a. heißt es dort: „Indessen läßt sich nicht verkennen, daß bei diesem Zusammenarbeiten der wissenschaftlichen Forscher mit den an den sogen. höheren Schulen tätigen Fachlehrern auch eine gewisse Gefahr besteht, die in dem natürlichen Uebergewicht der Hochschule gegenüber den für sie

1) Dreetz: Stoffauswahl und Methode im math. Unterr. Monatshefte f. höh. Sch. Heft 5, 1935.
2) F. Pietzker: Ueber den wissenschaftlichen Charakter des elementaren Mathematikunterrichts. Unterrichtsblätter. 1910.

vorbereitenden Lehranstalten begründet ist. Gerade diese Zusammensetzung des deutschen Ausschusses, in dem, wie oben erwähnt, alle wissenschaftlichen, in der Pflege der einzelnen Disziplinen (Mathematik, Physik, Chemie, Botanik, Zoologie) ihre Aufgabe sehenden Vereinigungen ihre Vertreter, die naturgemäß größtenteils Hochschullehrer sind, entsendet haben, gerade diese Zusammensetzung legt es nahe, daß das Schwergewicht bei der geplanten Reform auf die Seite fällt, die vom Standpunkte der wissenschaftlichen Forschung aus ja ganz natürlich als die Hauptseite erscheint, nämlich die Erhaltung und Steigerung des wissenschaftlichen Gepräges auch für den erst für das Hochschulstudium vorbereitenden Unterricht, der dabei möglichst der Entwicklung der wissenschaftlichen Forschung folgen solle."

An anderer Stelle heißt es: „Von dem geistigen Niveau, das man an diesen Studierenden beobachtet, kann man unmöglich die Normen ableiten, die für den den höheren Schulen obliegenden allgemeinbildenden Unterricht maßgebend sind. In diesem hat man es zum größten Teile mit Elementen zu tun, die dem Stoff des Unterrichts ein nur geringes Interesse und Verständnis entgegenbringen, während zugleich ihre Fähigkeit der wissenschaftlichen Auffassung überhaupt erst erweckt und entwickelt werden muß. Dazu gehört auch ein geeigneter Stoff, dessen Wert man nun nicht nach seiner Bedeutung für das wissenschaftliche System beurteilen darf, den man vielmehr vor allem daraufhin prüfen muß, inwiefern er den natürlichen psychologischen Bedingungen des jugendlichen Geistes konform ist. Und in diesem Lichte erscheint manches als berechtigt, was für die wissenschaftliche Fassung geradezu belanglos ist."

Ganz in diesem Sinne sagte auch Timerding[1]): „Das wenige, was ich an Erfahrung gesammelt habe, hat mich doch das eine gelehrt, wie ungeheuer vorsichtig man mit wissenschaftlichen Forderungen pädagogischen Aufgaben gegenüber sein muß. Jedes Individuum verträgt nur ein bestimmtes wissenschaftliches Niveau. Wie die Fische des Meeres darauf eingerichtet sind in einer bestimmten Wassertiefe zu leben, und zu sterben, wenn man sie in die Höhe zieht, so versagt auch der Mensch, wenn man versucht, ihn künstlich auf ein höheres Niveau der Auffassung und Erkenntnis zu ziehen . . . ".

Dem Streben nach Wissenschaftlichkeit ist zweifellos der mathematische

1) Timerding: Die Infinitesimalrechnung auf der Schule. Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft. 10. Jhrg. 5. Stck. 1911.

Unterricht mancherorts erlegen. Gewiß folgte er auch hierin den Entwicklung der ganzen Zeit[1]) allmählich nach — er konnte es aber nur, weil er in der Meraner Reform durch die Aktivität Kleins eine starke Bindung an die Hochschulwissenschaft (sowohl an die reine als auch an die angewandte Mathematik) erfahren hatte, wobei dann sowohl Klein in seinen zahlreichen Ausführungen als auch die an ihn anknüpfende Schulmethodik ständig bemüht war, den Stoff zu assimilieren.

Somit ergeben sich durch die bisherigen Ausführungen als wichtige, die Entwicklung des mathematischen Unterrichtes beeinflussende Faktoren:

1. Die durch Kleins Vorlesungen und Schriften, durch seinen starken Einfluß auf die Meraner Reform erfolgte stärkere Orientierung des mathematischen Unterrichtes an der mathematischen Wissenschaft.

2. Der Auseinanderfall zwischen theoretischem Schaffensdrange und praktischem Bedürfnis auch in der Mathematik, der zwar in Kleins vielseitiger Persönlichkeit noch vermieden war — weshalb er auch immer auf die Erziehung eines gesunden Wirklichkeitssinnes hinwies — der sich aber nach seinem Wirken nicht mehr aufhalten ließ.

3. Die in den Richertschen Richtlinien gegebenen Möglichkeiten zu weitgehenden Verschiebungen. Daraus ist auch erklärlich, daß nicht nur innerhalb der vier Schultypen, sondern auch unter gleichgerichteten Anstalten je nach der Art der den Stoff auswählenden Gesichtspunkte weitgehende Differenzierung auftrat.

4) Die sich in ungeheuerer Breite und Spezialisierung entwickelnden Teilgebiete in der Mathematik und den Naturwissenschaften[2]). Dadurch ging unter der erstickenden Fülle des Stoffes bzw. unter den vielen Auswahlmöglichkeiten oftmals der Blick für das

1) Auf den innigen Zusammenhang zwischen mathematischer Auffassung, dem ganzen Kulturleben und den Ueberzeugungen der Menschen, hat auch Timerding hingewiesen. Vgl. Timerding: Die Infinitesimalrechnung auf der Schule. 1911.

2) Vgl. auch hierzu: „Die Neuordnung des preußischen höheren Schulwesens" (Denkschrift 1924). „Die führenden Geister Deutschlands haben anerkannt, daß eine einheitliche Zusammenfassung des gesamten Kulturgehalts in einem Bewußtsein nicht mehr möglich und deshalb erst recht eine inhaltliche Gleichheit der Bildung in

Fassungsvermögen des Jugendlichen und die erst zu weckenden Fähigkeiten verloren. Vor allem kommt aber die Gefahr hinzu, daß der aus der Fülle der Einzelerkenntnisse herauskristallisierte Extrakt, der die letzten Ergebnisse einer in Breite und Tiefe durchgangenen Wissenschaft darstellt, bereits zu verfrühten wissenschaftlichen Verallgemeinerungen auf der Schule führt. Dann tritt aber die Freude an den Einzelerkenntnissen[1]) zurück und macht naturgemäß einem „unfreien Hantieren mit äußerlichen, in ihrem Wesen nicht voll begriffenen Regeln[2]) Platz. So sehr derartige Verallgemeinerungen einen erstrebenswerten Weitblick dann erkennen lassen, wenn sie allmählich aus der Fülle durchbluteten Stoffes herauswachsen, so gefährlich ist ihre verfrühte Anwendung, da dann weitgehendste Oberflächlichkeit die Folge ist.

Die gerade jetzt, nachdem ein Entwicklungsabschnitt von 30 Jahren seit der Meraner Tagung hinter uns liegt, erneuten Forderungen nach Stoffauswahl und Orientierung an den Anwendungen bestätigen die bisherigen Feststellungen. Der Kern liegt letzten Endes darin, daß sich der mathematische Unterricht frei machen muß von rationalistischen und empiristischen[3]) Beeinflussungen, wie es auch schon Höfler gefordert hatte[4]). Derartigen Bestrebungen ist immer eine Wissenschaftlichkeit[5]) benachbart, bei der jedwede Gefühlsbetonung, die gerade der Schulunterricht braucht, verschwindet.

allen Individuen durch unsere gegenwärtigen Zustände ausgeschlossen sei. Die Kulturtragik aber lag nach Simmel darin, daß sich die Kulturmittel nach der ihnen innewohnenden Gesetzmäßigkeit rücksichtslos entfalten mußten, ein selbständiges, rein sachlichen Normen gehorsames Wachstum erfuhren und dadurch nicht nur eine tiefe Fremdheit gegen die subjektive Kultur erwarben, sondern auch ein von dieser gar nicht einzuholendes Tempo des Vorschreitens . . . ."

1) Auch die Einzelergebnisse müssen zu Verallgemeinerungen führen, jedoch dürfen diese nicht verwechselt werden mit den hier gemeinten wissenschaftlichen, letzten Verallgemeinerungen, die vor allem viel mit unjugendlichen formalen Analogien arbeiten. Gerade im Interesse des Schülers kann man sagen: Wahr ist, was klar eingesehen wird, aber nicht, was durch den Nebel unklarer Analogien erscheint.

2) F. Pietzker: Ueber den wissenschaftlichen Charakter im elementaren Mathematikunterricht.

3) S. folgendes Kapitel.

4) Vor dem Anschluß an das Programm der Rationalisten und Empiristen im Schulunterricht hatte Höfler bereits deutlich gewarnt. Höfler: Didaktik des mathematischen Unterrichts. 1910.

5) Damit im engen Zusammenhange steht auch die weitgehende Verwendung von Fremdwörtern in der mathematischen Fachsprache.

Die Pflege des funktionalen Denkens.

Da seit den Meraner Reformvorschlägen das funktionale Denken immer wieder als inhaltlicher Bildungswert hervorgehoben worden ist, soll im folgenden zunächst seine Eigenart herausgestellt werden. Anders als beim formal-logischen Denken, das mit Begriffen, Urteilen und Schlüssen arbeitet, legt das funktionale Denken Wert auf das Auffinden von tatsächlich vorhandenen Beziehungen zwischen Größen (sowohl Raum- als auch Zahlengrößen), auf ihre Abhängigkeit und dauernde Veränderlichkeit, ferner auf das Erkennen und Herstellen neuer möglicher Beziehungen. Seine Bedeutung liegt darin, daß eben durch diese Feststellungen von Größenbeziehungen die mathematischen Gebilde gründlich erfaßt werden, so daß es sich um ein wirklich inhaltlich bestimmtes Denken, um ein Denken in der Sache handelt. Den Gegensatz dazu bildet z. B. das im mathematischen Unterricht auch zu pflegende logische Denken, wie es die Euklidische Geometrie verlangt, das mit Begriffen arbeitet, aus Urteilen ein neues ableitet, aber die soeben angedeuteten Größenbeziehungen nicht berücksichtigt. Dem formal-logischen Denken gegenüber, das ja bis zu einem gewissen Grade auch in der Grammatik der Sprachen Pflege findet, werden durch das funktionale Denken die tatsächlich vorhandenen mathematischen Beziehungen erfaßt. In höchst unbestimmter Form ist das funktionale Vorstellen bereits zeitig beim Kinde vorhanden[1]), und es wird dieses weit mehr, als oft bewußt wird, von jedem von uns im täglichen Leben verwendet. Die Fähigkeit aber, solche Beziehungen klar zu erkennen, wird dann gegenüber denen, die es nicht können, einen erheblichen Weitblick sichern.

Nun hat Höfler für den Schulunterricht eine äußerst wertvolle Unterscheidung derart gemacht, daß er zunächst von der Pflege des funktionalen Anschauens sprach und erst weit später vom funktionalen Denken. Gerade in dieser Hinsicht hat er vor Uebertreibungen, die dann in der weiteren Entwicklung festzustellen sind, dringend gewarnt[2]): „Hoffen wir, daß diese gar nicht genug zu begrüßende erste inhaltliche Reformforderung nicht etwa durch ungeschickte Verfrühungen und sonstige Uebertreibungen zu Tode gehetzt werde. Indem wir unsererseits den allgemeinen

1) Rudert: Die Grundlagen des funktionalen Denkens in ihrer Bedeutung für den ersten mathematischen Unterricht. 1919.
2) Höfler: Didaktik des mathematischen Unterrichtes. 1910.

Funktionsbegriff erst für den vorletzten Jahrgang aufzusparen empfehlen und alles Frühere nur in der Weise ungekünstelter Uebungen zu behandeln raten, hoffen wir, das Unsrige gegen solche Verfrühungen getan zu haben. Möchte sich doch auch im übrigen der leider bei manchen Lehrern selbst gelegentlich dieser an sich so ausdrücklich antiformalistischen Neuerung zu beobachtende Hang zum Formalismus nicht des Schlagwortes „Pflege des funktionalen Denkens“.. bemächtigen! Dem guten Willen jedes nicht von vornherein formalistisch gesinnten Lehrers, dieses funktionale Denken dem Schüler nicht aufzuzwingen, sondern dessen allmähliches Reifen bis zum wissenschaftlichen Funktionsbegriff nur bei jeder aus dem Inhalt selbst sich darbietenden Gelegenheit sorgsam und wirksam zu fördern, wird der beste Bundesgenosse ein lebensvoller naturwissenschaftlicher Unterricht bleiben...“

In recht kindesgemäßer und ungekünstelter Form kann dieses funktionale Anschauen der Geometrieunterricht mit seinen stetigen Bewegungsänderungen pflegen. Mit diesen stetigen Bewegungsänderungen arbeitet ja auch die neuere Geometrie, aber zur Pflege des funktionalen Anschauens ist auch nur dieses Arbeitsprinzip und nicht etwa ihr System notwendig.

Mit der zunehmenden Betonung, die die Arithmetik (Arithmetisierung der ganzen Mathematik) und Algebra in der mathematischen Wissenschaft erfuhren, ist es wohl auch zu erklären, daß man gerade in der Gleichungslehre durch das nachträgliche tabellarische Zuordnen von Zahlenreihen und die ergänzende graphische Darstellung von Funktionsgleichungen das funktionale Denken ganz besonders pflegen zu können glaubte. Auf eine der dabei recht zeitig entstehenden Schwierigkeiten weisen die Richtlinien in folgender Form hin: „Um eine klare Trennung der Begriffe „Unbekannte und Gleichung“ von den Begriffen, „Veränderliche und Funktion“ zu erzielen, darf aber die graphische Darstellung im rechtwinkligen Koordinatensystem erst nach den Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten behandelt werden.“ Man hat m. E. den bildenden Wert der graphischen Darstellungen zu hoch eingeschätzt. Diese Veranschaulichungen sind zwar ein äußeres unterstützendes Mittel, aber über dieser gerade die Algebra unterstützenden Veranschaulichung hat man vielfach übersehen, daß der Schüler auf der Mittelstufe die tieferen Zusammenhänge zu wenig übersehen kann und dann meist mit ganz schematisch angeeigneter Technik arbeitet. Mit vollem Recht warnte be-

reits Höfler davor, daß auf der Mittelstufe schon ein ganzes Stück analytischer Geometrie erledigt wird.

Sehr zu unterscheiden von den mathematischen Gesetzen, bei denen man durch nachträgliches Einsetzen in die Formel die tabellarischen Zahlenzuordnungen herstellt[1]), ist das bloße Setzen solcher Zuordnungen, die auf dem rein empirischen Wege des Messens gefunden worden sind. Letzteres wurde sowohl im mathematischen Unterricht als auch in dem mit ihm in engster Konzentration stehenden naturwissenschaftlichem Unterrichte gepflegt. In dem Streben nach tabellarischem Setzen von Zahlen-, bezw. Größenreihen ist deutlich der Empirismus zur Geltung gekommen.

Das in unserer Zeit außerordentlich gesteigerte Drängen nach Maßerfassung, das sich in einem starken Hervortreten der Größe, bezw. Größenreihen zeigt, und hinter dem oft die auch für den Jugendlichen lebendigere Mannigfaltigkeit des Qualitativen zurückgetreten ist, hat auch den Schulunterricht beeinflußt.

Der Schüler muß dieses soeben erörterte Hilfsmittel des Empirismus kennen lernen. Entscheidend ist aber hier die Breite des Raumes, die ihm im Schulunterricht teilweise zugestanden worden ist und zugestanden werden darf. Bei übertriebener Verwendung besteht die große Gefahr, daß durch ein dauernd gezwungen herbeigeführtes Setzen von Größenzuordnungen etwas Unjugendliches in den Unterricht getragen wird, da der Erwachsene, der die Nützlichkeit dieser Methode erkannt hat, weit mehr Interesse an ihr hat als der Jugendliche.

Der Empirismus wurde sowohl im mathematischen als auch im naturwissenschaftlichen Unterrichte von den Anhängern der extrem arbeitsunterrichtlichen Richtungen bevorzugt zur Geltung gebracht, da man hier die Möglichkeit sah, unter dauernder Verwendung der Sinne, insbesondere des Auges, den Schülern ein vorurteilsloses Herangehen an den Stoff und weitgehende Selbsttätigkeit zu ermöglichen. Es zeigte sich aber, daß angesichts der Breite und Tiefe des gegenüberstehenden Stoffes der Boden bald unter den Füßen verloren ging, ganz abgesehen davon, daß angesichts der zur Verfügung stehenden Zeit oft Oberflächlichkeit die Folge sein mußte.

1) Durch ausgiebige Verwendung der Tabelle wollte man neben dem Zuordnen das Fließende der Größen anschaulich machen. Die Richtlinien für die Lehrpläne an den höheren Schulen Preußens fordern in dieser Richtung: Daneben ist ebenso das andere Hilfsmittel, die Tabelle, in ihrer Bedeutung voll zu würdigen.

Solange die empirische Methode[1]) im Umkreis der exakten Naturwissenschaften als ein Mittel gewertet wird, mit dessen Hilfe man in der Beherrschung der Natur durch Erkenntnis von Gesetzmäßigkeiten vorwärts schreiten will, ist sie wertvoll. Dann sind in den erfahrungsgemäß gefundenen Abhängigkeiten und den graphischen Darstellungen eindrucksvollste Indikatoren wirkender Ursachen zu erblicken. Sie ist aber auch nur dann wirklich von wahrem Werte, wenn dieser Kampf nicht zur Befriedigung individueller Machtgelüste geführt wird, sondern dem Willen zur verantwortlichen Beherrschung der Kräfte der Natur im Dienste einer Idee entspringt. „In diesem Sinne bleibt jede technische Anwendung von Naturgesetzen gelenkt von der Ehrfurcht vor der natürlichen Ordnung.“[2])

Anders jedoch, wenn sich der Empirismus mit dem Rationalismus verknüpft und zu einem Wissenschaftlichkeitsideale führt, bei dem Person und außen gegebene Sache völlig auseinandergefallen sind und wo dann das Bindeglied ein kombinierender Intellekt ist! Ausrichtende Willenskraft geht dann verloren, und es trifft das zu, was Hildebrandt zunächst für die Wissenschaft geäußert hat, was sich aber in entsprechend gerechter Abstufung auch auf den Unterricht übertragen läßt: „Durchschaut man die Oberflächenreflexionen, das Spiel mit Definitionen, um den Lebensgrund des Geschehens selbst darzulegen, so erkennt man als tragendes Lebensgefühl, als Kern der Weltanschauung in diesem modernen Positivismus die Verarmung des Lebens, die Weltmüdigkeit.“

Dort aber, wo der Positivismus rationalistischen und empiristischen Strömungen den Weg in den mathematisch-naturwissenschaftlichen Schulunterricht frei machte, zeigte letzterer nur zu leicht das Bild einer Mischung von Wissenschaftlichkeit, Oberflächlichkeit und von Mangel an innerer Ausrichtung. Die letztere mußte verloren gehen, als der erstickenden Fülle des Stoffes und dessen Assimilation an das Niveau des Jugendlichen die Hauptaufmerksamkeit zugewandt wurde.

Nunmehr kehre ich zu den engeren Betrachtungen über die Pflege des funktionalen Anschauens und Denkens zurück. Bisher wurde festgestellt, daß:

---

1) Auch beim geometrischen Anfangsunterr. ist von empirischem Vorgehen gesprochen worden. Aus dem Zusammenhange geht jedoch hervor, um welche speziellen Hilfsmittel des Empir. es sich hier handelt.

2) K. L. Wolff-Ramsauer: Zur Geschichte der Naturanschauung. Zeitschrift für die gesamte Naturwissenschaft. 1935.

1. das funktionale Anschauen in kindesgemäßer Form nicht so sehr im Algebra- als vielmehr im Geometrieunterricht unter Benutzung der in der neueren Geometrie dauernd verwendeten stetigen Bewegungsübergänge gepflegt werden muß, wobei das tabellarische Setzen von zugeordneten Zahlenreihen zunächst nicht das Wesentliche ist;

2. das tabellarische Setzen zugeordneter Zahlenreihen (bei den mathematischen Gesetzen nachträglich) nicht verfrüht und gezwungen gepflegt werden darf und vor allem nicht zu Uebertreibungen führen darf. Diese Uebertreibungen liegen nahe mit Rücksicht auf seine Nützlichkeit bei den erfahrungsgemäß gewonnenen Zuordnungen auf allen Lebensgebieten in unserer von der Zahl und Größe beherrschten Zeit. —

„Durch die Einführung infinitesimaler Methoden erhalten die Schüler Kenntnis von dem wichtigsten Werkzeug der Mathematik" heißt es in den Richtlinien für die Lehrpläne der höheren Schulen Preußens. Damit hat sich die Infinitesimalrechnung, die ja den krönenden Abschluß in der Pflege des funktionalen Denkens darstellt, im mathematischen Unterricht die Stellung gesichert, die sie allein schon mit Rücksicht auf den Physikunterricht haben muß. (Geschwindigkeits-Arbeitsbegriff etc.). Der Kampf, den ihre Einführung in den Schulunterricht entfachte, ist im einleitenden Kapitel angedeutet worden. Der letzte Grund dieses „Für und Wider die Infinitesimalrechnung" tritt jetzt immer klarer hervor. Die vor der Reform oft allerdings in zu weit getriebener Isolierung, aber in umso größerer Klarheit gepflegte Trennung nach Lage und Zahl, nach reiner Geometrie einerseits und Arithmetik und Algebra anderseits, die beide ihre spezifischen, kraftbildenden Werte haben, mußte zugunsten der sich darüberschiebenden Fusion und der sich in den Vordergrund drängenden Größe prinzipiell fallen gelassen werden, wenn der gesamte Unterricht erfolgreich auf das krönende Ziel die Infinitesimalrechnung abgestellt werden sollte. Und diese grundtiefe Umstellung wurde notwendig durch die Bedeutung, welche die Mathematik und besonders die Infinitesimalrechnung in Technik[1]) und exakter Naturwissenschaft gewonnen hatte, Gebiete auf deren ungeahnten Fortschritten unsere ganze moderne Kultur aufbaut und deren Grundpfeiler eben Maß (Größe) und Zahl sind.

1) Für Klein war — wie wiederholt schon hervorgetreten ist — der höchste Anheftungspunkt die Technik. Im hohen Maße verkörperte er die in Sprangers Lebensformen erwähnte Verbindung von Wirtschaftlichkeit und Wissenschaft.

In seinem sehr anregenden Vortrage über „Die Infinitesimalrechnung auf der Schule" hat Timerding sowohl diese tiefe Umstellung als auch die Bedeutung der Infinitesimalrechnung für die moderne Kultur mit folgenden Worten hervorgehoben: „...Nur vor einem muß nachdrücklich gewarnt werden, nämlich davor, die Unterweisung in der Infinitesimalrechnung für ein sich vollkommen abgesondertes Gebiet zu halten und als solches auf den übrigen ganz in den herkömmlichen Bahnen gehaltenen Unterricht in den letzten Schuljahren aufzusetzen. Wenn auf die Begriffe der Infinitesimalrechnung eingegangen wird, dann müssen sie den ganzen mathematischen Unterricht von Anfang an beeinflussen, nicht so, daß etwa schon in der Tertia mit Differentialen herumgeworfen werden soll, sondern nur so, daß die Gewöhnung an den Funktionsbegriff, der ja die Grundlage der Infinitesimalrechnung ist und der sie geradezu zu seiner vollen Ausbildung notwendig erfordert, schon frühzeitig eintritt. So erst kann überhaupt der Schüler lernen, das Wesen der mathematischen Größen richtig zu verstehen, und so allein kann er begreifen, was der mathematischen Größenlehre ihre reale Bedeutung gibt. Die Notwendigkeit des Funktionsbegriffes gerade in diesem Sinne der Verkettung mit den Anwendungen überhaupt erkannt zu haben, ist das große Verdienst von Herbart[1]), der damit so zu sagen seine pädagogische Laufbahn begann. Aber wie lange hat es gedauert, bis seine Ideen zum Keimen kamen! Erst jetzt beginnen sie allgemach ihre Früchte zu tragen, und wenn ich mit dem Ausdrucke einer persönlichen Ueberzeugung schliessen darf, so muß ich sagen, daß ich dies für den Weg halte, auf dem wir weiter zu einer segensreichen Ausgestaltung des mathematischen Unterrichtes gelangen können. Wir wollen ja durch den Schulunterricht nicht bloß einen geistigen Drill erreichen, so wertvoll diese formale Seite auch sein mag, wir wollen dem Schüler gleichzeitig in sein späteres Le-

1) „In der Schrift „Pestalozzis ABC der Anschauung" (1802) sagt Herbart zum Beispiel: „Es sei das erste Gesetz des Vortrags, die mathematische Einbildungskraft nicht zu vernachlässigen, sie früh an vollständiges und rasches Durchlaufen des ganzen Kontinuums, das unter einem allgemeinen Begriff enthalten ist, zu gewöhnen. Hieraus folgt, daß man schon beim ersten Anfange die Größen soviel als möglich als fließend betrachten soll. Dadurch wird man das Bedürfnis nach der gesamten Mathematik anregen." Beachtenswert ist auch die nähere Bestimmung des Einflusses, den sich Herbart von dem mathematischen Unterrichte verspricht: „Gewöhnt den Jüngling, die Dinge dieser Welt als Größen und ihre Veränderungen als Funktionen der bewegenden Kräfte, das heißt als notwendige, bei aller scheinbaren Unregelmäßigkeit doch höchst gesetzmäßige und in jedem ihrer Fortschritte genau bestimmte Erfolge der wirkenden Ursachen zu betrachten."

ben einen Schatz an brauchbaren Kenntnissen und das Verständnis für die modernen Kulturerscheinungen mitgeben. In diesem Sinne meine ich, müssen wir ihre Einbürgerung an den höheren Schulen rechtfertigen wollen. Sie ist ein Bestandteil der modernen Kultur, und wie ich glaube nicht der letzte und unwichtigste ...."[1])

Der sich vollzogene Umschwung war so einschneidend und umwälzend, daß zur Zeit der Meraner Tagung z. B. nähere Angaben über das Ausmaß, in dem die Infinitesimalrechnung gepflegt werden sollte, noch gar nicht gegeben wurden. Aus Gutzmers „Bericht betreffend den Unterricht in der Mathematik an den neunklassigen höheren Lehranstalten"[2]) entnehmen wir darüber: „Wir haben dieser Freiheit (des Lehrers!)[3]) in unserem Lehrplan die Entscheidung eines besonders wichtigen Punktes überlassen, hinsichtlich dessen die Meinungen der Fachmänner noch nicht genügend geklärt erscheinen. Wir befürworten in unserem Lehrplan (als eine Folgerung aus unserem allgemeinen Prinzip), daß der mathematische Unterricht in der Prima des Gymnasiums bis an die Schwelle der Infinitesimalrechnung herangeführt werden muß, haben aber nichts Bestimmtes darüber festgesetzt, in welcher Form dieser Abschluß zweckmäßig erreicht werden wird. Sind hierüber erst durch Versuche an verschiedenen Anstalten vielseitigere Erfahrungen gewonnen, so wird sich mit größerer Sicherheit urteilen lassen, wie die Sache am besten gemacht wird.

Als abschließendes Ziel des mathematischen Unterrichts auf Oberprima erscheint schließlich ein Dreifaches:

ein wissenschaftlicher Ueberblick über die Gliederung des auf der Schule behandelten mathematischen Lehrstoffs,

eine gewisse Fähigkeit der mathematischen Auffassung und ihrer Verwertung für die Durchführung von Einzelaufgaben,

endlich und vor allem die Einsicht in die Bedeutung der Mathematik für die exakte Naturerkenntnis und die moderne Kultur überhaupt."

Dieser letzte Punkt ist von Klein wiederholt betont worden. Bereits auf den Breslauer Verhandlungen 1904 äußerte er sich in seinen

1) Timerding: Die Infinitesimalrechnung auf der Schule. Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft. 1911.

2) Gutzmer: Die Tätigkeit der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Aerzte 1908.

3) Diese Freiheit des Lehrers ist im Interesse eines gefühlsbetonten Unterrichtes von großer Wichtigkeit. Sie darf nur nicht dazu mißbraucht werden, um solche Richtungen zu betonen, die schon durch ihren Charakter grundsätzlich jede Gefühlsbetonung unmöglich machen.

„Bemerkungen zum mathematischen und physikalischen Unterricht" u. a.: „...Das funktionentheoretische Denken in der sozusagen naiven Form, in der es von den großen Mathematikern des 18. Jahrhunderts entwickelt wurde, also die elementare Lehre von der Differential- und Integralrechnung, hat im Laufe des 19. Jahrhunderts alle Gebiete exakter Forschung immer vollständiger durchdrungen, — von der Physik beginnend, die sich in dieser Hinsicht als erste neben die von je mathematisch formulierte und darum als Vorbild dienende Astronomie stellte, bis hin zur Statistik und dem Versicherungswesen. Den Unterricht an den höheren Schulen so zu führen, daß der Schüler instand gesetzt werde, die solcherweise gewonnene Geltung der Mathematik nach ihrer allgemeinen Bedeutung zu verstehen, das ist die Aufgabe..... Es gilt nicht mehr neue Gedanken zu finden, sondern die richtigen Gedanken innerhalb der gegebenen Verhältnisse in richtiger Weise zur Geltung zu bringen. Wir wären weiter, wenn das verflossene Jahrhundert der Verbreitung allgemeinerer mathematischer Kenntnisse in weitere Kreise nicht vielfach ungünstig gewesen wäre. So hat der herrschende Neuhumanismus mit seinen vorwiegend literarisch-ästhetischen Interessen mannigfach hemmend gewirkt, — für den Neuhumanismus kommt die Mathematik, wenn überhaupt, so nur nach ihrem formalen Werte, nicht nach ihrem Inhalt in Betracht, im strikten Gegensatz zu der Wertschätzung, deren sich unsere Wissenschaft im Zeitalter des Rationalismus erfreute ..."

Durch diese grundlegende Umstellung des mathematischen Unterrichtes sind auch manche Bedenken, die der Einführung der Infinitesimalrechnung im Schulunterricht entgegenstanden, zerstreut worden. So durchdringen, um nur ein Beispiel zu nennen, der Grenzwertbegriff und der so wichtige Integralbegriff in zwar nicht genannter aber anschaulich gepflegter Form bereits zeitig den mathematischen Unterricht. (Vielecks-lehre, Stereometrie.) Das Ausmaß für den Umfang, in dem die Differential- und Integralrechnung auf der Schule gepflegt werden, gilt heute noch der von Timerding in seinem Vortrage über „Die Infinitesimalrechnung auf der Schule"[1]) geschilderte zweite inhaltliche Standpunkt, daß über die Differentialquotienten der einfachen Funktionen

1) Timerding: Die Infinitesimalrechnung auf der Schule. Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft. In diesem Vortrage ist in so klarer Weise auf die Befürchtungen und Schwierigkeiten, die der Aufnahme der Infinitesimalrechnung im Unterr. entgegenstanden, auf die verschiedenen Auffassungen der Infinitesimalrechnung und des Unendlichen eingegangen, so daß hier ausdrücklich darauf verwiesen wird.

nämlich die Potenz, der trigonometrischen Funktion, der Exponentialfunktion und des Logarithmus und die Integrale der drei ersten Funktionsarten nicht hinausgegangen und alle verwickelteren Ausdrücke vermieden werden."

Während bisher die Notwendigkeit einer Behandlung der Infinitesimalrechnung im Zusammenhange mit der gewaltigen Entwicklung der exakten Naturwissenschaften erörtert wurde, muß nun noch ein weiterer wichtiger Punkt berücksichtigt werden. Durch die Differential- und Integralrechnung wurden der reinen mathematischen Forschung unermeßliche Gebiete eröffnet. Daß der mathematische Unterricht diese nicht unmittelbar berücksichtigen konnte, ist verständlich. Immerhin ist in dem bereits mehrfach erwähnten Vortrage auf diese Frage eingegangen: „So interessant und wertvoll aber diese Analysis des Unendlichen[1]) ist und so unbedingt sie in die Wissenschaft gehört, so ist es nach meinem Dafürhalten doch nicht gut, dem Schüler solche Theorien beizubringen, denn er wird sie kaum richtig verstehen und nur eine Trübung seines Denkens dadurch erfahren; auch verbietet sich ihre volle Durchführung auf der Schule durch ihre Langwierigkeit und Schwierigkeit. Wenn man auch die moderne exakte Begründung der Infinitesimalrechnung in Betracht zieht, so muß sie doch nach Möglichkeit vereinfacht und abgekürzt werden, es kann sozusagen nur ein populärer Auszug aus ihr gegeben werden. Sie ganz zu vermeiden, liegt allerdings kein zwingender Grund vor, im Gegenteil ist nicht zu leugnen, daß auch das Herausgreifen einiger weniger Bestandteile von ihr außerordentlich erzieherisch wirken kann. Diese erzieherische Wirkung besteht wesentlich darin, daß sie lehrt, in der Mathematik nicht alles als selbstverständlich hinzunehmen, weil es die Anschauung unmittelbar zeigt. In der Berufung auf die Anschauung liegt eine Verführung zur Oberflächlichkeit, die am wirksamsten bekämpft wird, wenn man wenigstens an einzelnen Punkten bis zur vollen logischen Durchbildung durchdringt. Diese Durchbildung war ja auch in der Geometrie das Ziel

1) Zugrunde liegt ihr die Lehre von den Individuen, d. h. die Lehre, daß sich alle Körper in letzter Instanz aus Punkten zusammensetzen, derart, daß sich erst die Punkte zu Linien aneinanderreihen, die Linien zu Flächen zusammenschließen und endlich die Flächen sich zu Körpern aneinanderlegen. Es ist eine Leistung des menschlichen Geistes gewesen, aus dem Komplexen bis zu diesen letzten Raum- und Zeitpunkten vorzustoßen. Indessen liegt die individuelle Auffassung gegenüber der z. B. bei Höfler anzutreffenden wohltuenden infinitesimalen Auffassung unseren Schülern wesentlich ferner.

bei der Begründung der modernen Axiomatik, und wie man die Axiomatik auf der Schule nicht von Anfang an und nicht bis in die letzten Konsequenzen durchführen kann, so wird man auch die arithmetische Theorie der Infinitesimalrechnung mit einer gewissen weisen Maßhaltung verwenden müssen....

Trotzdem scheint es nicht zweckmäßig, ja ganz unmöglich, einen methodisch vollständigen Lehrgang auf dem Wege der exakt arithmetischen Theorie für die Schule zu versuchen. Man könnte dabei nur an die Oberrealschulen denken, denn den Gymnasien fehlt hierzu durchaus die Zeit. Man wird aber einwenden, daß, wenn der ganze Charakter der Oberrealschulen darauf zugeschnitten sein soll, die Schüler zu praktischen Berufen und für das praktische Leben vorzubilden, auch eine praktischere Auffassung der Infinitesimalrechnung Platz greifen müsse... In allen diesen Anwendungen erscheinen die Integralbegriffe nicht rein, sondern in einer approximativen Umdeutung.... Indessen ist es nicht schwer, die approximative Auffassung bei einer elementaren Behandlung der Infinitesimalrechnung einigermaßen konsequent durchzuführen... Sie hat den großen Vorzug, daß sie sich unmittelbar dem physikalischen Unterrichte und auch dem astronomischen oder geodätischen Unterrichte, wo ein solcher gegeben wird, angliedert. Sie läßt sich auch in dem geometrischen Unterrichte mit großem Nutzen verwenden, weil sie die Beziehung zur Zeichnung nicht aus dem Auge verliert... Nach alledem kann es wenigstens vom praktischen Gesichtspunkte aus am zweckmäßigsten erscheinen, trotz einzelner theoretischer Bedenken diese Methode für den Unterricht in der Infinitesimalrechnung an der Schule zu wählen...."

Ganz im Sinne dieser Timerdingschen Ausführungen heißt es dann in den Richtlinien: „.... Hier hat der Unterricht einen Mittelweg zu suchen zwischen berechtigten Anforderungen an wissenschaftliche Strenge und der Rücksicht auf praktische Bedürfnisse, und er wird das Hilfsmittel geometrischer Veranschaulichung ausgiebig benutzen müssen."

Zusammenfassung und Ausblick.

Nachdem nunmehr ein Entwicklungsabschnitt von 30 Jahren seit der Meraner Tagung hinter uns liegt, ist wieder eine Neuorientierung des mathematischen Unterrichtes notwendig geworden und ist ferner, wie in den Jahren vor der Reform eine lebhafte Hinwendung zu den Anwendungen festzustellen. Letztere bestätigt nur die bisherigen Feststellungen. Indessen häufen sich selbst die Anwendungsgebiete und die dazu grundlegenden Stoffgebiete so sehr, daß auch hier eine Auswahl schwer wird. Der Kern der Umstellung liegt tiefer.

Dort, wo der mathematische Unterricht eine zu starke Bindung an die mathematische Wissenschaft erfahren hat, dort wo vor allem der mathematische Unterricht sich in der Nachkriegszeit zu sehr ausgesprochen positivistischen Strömungen angeschlossen hat, muß er sich wieder auf die engeren schulischen Aufgaben besinnen. *Die Hauptaufmerksamkeit darf nicht der methodischen Assimilation der Fülle des Stoffes an das Niveau des Jugendlichen zugewandt werden.* Die bloße Gesetzlichkeit eines Stoffgebietes allein wird niemals von tieferem Einfluß auf die Jugendlichen sein.

Manche im Unterricht gepflegten Ansätze, die doch nur dann vollen Sinn haben und volle Frucht tragen, wenn sich die Schulzeit im mathematisch-naturwissenschaftlichen Fachstudium fortsetzt, deren Pflege also nur in Hinblick auf eine höchst ungewisse ferne Zukunft Daseinsberechtigung hat[1]), müssen wegfallen.

Gebiete rationaler Verknüpfungen[2]) und geschlossener, organisatorischer Aufbau[3]) sind — selbst wenn sie nur als abschließender wissenschaftlicher Ueberblick gedacht sind — als unjugendgemäß und wenig lebenswirklich abzulehnen. Mit ihnen ist ganz besonders eine innere, für den Jugendlichen blutleere Systematik verbunden.

Die Freude an den Einzelerkenntnissen und ihren bescheidenen Verallgemeinerungen muß in *gefühlsbetonter* Arbeit wiederkehren, dagegen die große Gefahr der Verflachung durch verfrühtes Einspannen des Unterrichtes in das vorschwebende Ziel wissenschaftlicher formaler Verallgemeinerungen muß stets vor Augen gehalten werden. Die auf diesem

1) Zu derartigen Ansätzen gehört, um nur ein Beispiel zu nennen, eine eingehendere Behandlung des einfachen und Doppel-Verhältnisses.
2) S. betonte Verwendung der Bewegungsgruppe.
3) S. Aufbau des Zahlenbereichs, Behandlung nichteukl. Geometrie.

Wege erreichte Weite des Horizontes ist nur dann wirklich wertvoll, wenn über dem umfassenden Hinblick auf die Gesamtheit der Erscheinungen das Verständnis für die Einzelerscheinungen nicht verloren geht.

Die Geschichte der Mathematik, die ja seit den Meraner Vorschlägen durch das Wirken Felix Kleins im mathematischen Unterricht stärkste Beachtung gefunden hat, ist in die Richtlinien in folgender Form aufgenommen worden: „Die Geschichte der Mathematik ist grundsätzlich im Unterricht zu berücksichtigen, bei der Entwicklung des Lehrstoffs ebenso wie bei der Aufgabenstellung. Der Zusammenhang mit der allgemeinen Kulturentwicklung ist dabei nach Möglichkeit hervorzuheben. Die Schüler der oberen Klassen sind auch zum Lesen geschichtlich bedeutsamer mathematischer Schriftsteller anzuregen." Die Geschichte der Mathematik[1]) kann durch die Biographie unserer großen Mathematiker — besonders an Gauß, Leibniz und Kepler — zeigen, wie diese noch offenen Auges und nicht vom spezialfachlichem Standpunkte aus Teilnahme an allen lebendigen Fragen zeigten. Aber auch die Forderung der Richtlinien: „Soweit es möglich ist, empfiehlt sich das Anknüpfen der Problemmathematik an die historische Fragestellung" verdient im Unterricht keineswegs der rein historischen Seite wegen Beachtung, sondern eben wegen der Berücksichtigung bei der Entwicklung des mathematischen Lehrstoffs, über die sich u. a. Timerding äußerte[2]): „Dieser (d. math. Unterricht) führt aber nicht bloß vom methodischen, sondern auch vom sachlichen Gesichtspunkte auf die Methoden früherer Zeiten, denn es ist ja klar, daß mit der fortschreitenden Entwicklung der Mathematik der Inhalt der wissenschaftlichen Forschung immer mehr an Schwierigkeit zunimmt und über den Rahmen dessen, was sich auf der Schule behandeln läßt, weit hinausgeht. Dagegen werden die Dinge, die in früherer Zeit den Forscher beschäftigt haben, für die Schule von Wichtigkeit bleiben, weil sie elementarer und einfacher sind und damit die Grenzen des Erreichbaren nicht übersteigen...."

Die Geschichte der Mathematik kann weiterhin viel anknüpfen an die von der Zahl freie, klare, rein geometrische Auffassung der Mathematik in der griechischen Antike[3]).

---

1) Klein: Elementarm. v. h. Standpkte aus. 1925. Richtlinien für die Lehrpläne der höheren Schulen Preußens. 1927.

2) Timerding: „Die Infinitesimalrechnung auf der Schule. Sitzungsberichte der Berliner Mathem. Gesellschaft. 1911.

3) S. Platon in Tropfke: Geschichte der Elementarmathematik. 1924.

Die vom Jugendlichen ganz natürlich als etwas Verschiedenes empfundenen Gebiete der Geometrie einerseits und der Arithmetik und Algebra anderseits, die beide ihre spezifischen Bildungsaufgaben haben, dürfen nicht durch eine gezwungene und verfrühte Fusion überbrückt werden. Eine zu eifrig gesuchte und betriebene Fusion hat vielfach zur Konfusion und zum Hineintragen eines Erwachsenenstandpunktes in den Unterricht geführt. Schimmack[1]) äußert mit Recht, daß die Folge bei zu weit getriebener Isolierung Unfruchtbarkeit in Gestalt der Zurückdrängung der so wichtigen Phantasie ist, daß bei einseitig erstrebter Fusion die Klarheit leidet und Konfusion entsteht. Eine schärfere Trennung nunmehr nach der Dreiheit Lage, Größe, Zahl und die Herstellung eines gesunden Gleichgewichtes zwischen ihnen wird klärend und sichtend in der eingestürmten Stoffülle wirken.

Die Betonung der Lagebeziehungen wird auf der Oberstufe die neuere Geometrie mit ihrem anschaulich, zeichnerischen Erfassen übernehmen können. Auf der Mittelstufe wird — nachdem ein kindesgemäßer geometrischer Anfangsunterricht vorangegangen ist — die Euklidische Geometrie keine zu weitgehende Zurückdrängung erfahren dürfen, da sie vorbildlich ist in der Schulung des Schließens und direkten Beweisens, die kritische Urteilskraft der Schüler weckt und ihre Verstandsbildung fördert. Durch diese rein geometrischen Gebiete wird aber unstreitig „zur Belebung und Erhaltung des echten, in der Mathematik der Neueren manchmal vermißten geometrischen Geistes" viel mit beigetragen, deren Studium bereits Gauß[2]) als eine kräftige Geistesnahrung empfohlen hat.

Die beiden seit den Meraner Reformvorschlägen in den Mittelpunkt gestellten inhaltlichen Sonderaufgaben: die Stärkung des Raumvorstellungsvermögens und die Erziehung zur Gewohnheit funktionalen Anschauens und Denkens werden, nachdem die Uebertreibungen und Irrwege herausgestellt worden sind, befreit von erstickender Stoffülle in umso klarerer Form gepflegt werden können. Dabei wird das beste Hilfsmittel zur Stärkung des Raumvorstellungsvermögens ein in Verbindung mit der Geometrie (s. oben) durchgeführter darstellend geometri-

1) Schimmack: Ueber die Verschmelzung verschiedener Zweige des mathematischen Unterrichtes. Berichte der IMUK.

2) Gauß über Monge: Geometrie descriptive. s. Wolff: Die Entwicklung der Abbildungsidee in Wissenschaft und Schule. Unterrichtsblätter. 1933.

scher Unterricht sein, in dem gerade die ebene Zeichnung körperlicher Gebilde die Hauptsache ist.

Die zunehmende „Herrschaft der Zahl"[1]) seit dem Weltkriege hat ihr und der Größe auch im Schulunterricht ein weites Eindringen ermöglicht. In seiner krassesten Auswirkung führt das aber, wie gezeigt worden ist, in einer stark rechnerischen Ausgestaltung des mathematischen Unterrichtes zu einer unberechtigten Hochschätzung der Abstraktion und zur Vernachlässigung aller unmittelbaren Anschauung. Damit im engen Zusammenhange steht der Auseinanderfall von theoretischem Schaffensdrange und praktischem Bedürfnis, der zwar in Kleins vielseitiger Persönlichkeit äußerlich noch überbrückt war, weshalb er stets auf die Erziehung eines gesunden Wirklichkeitssinnes hinwies, der sich aber nach seinem Wirken unter dem zusätzlichen Einfluß der erörterten Zeitströmungen nicht mehr aufhalten ließ.

Abstraktes Denken darf aber niemals zu einer Abkehr von der Wirklichkeit führen, sondern es bedeutet die Beherrschung derselben durch die Kraft des Geistes.

Unter dieser Wertung gewinnen, wie aufgezeigt worden ist, die wertvollen Erfahrungen in der ersten Zeit der Reform, die auf den Gebieten der Astronomie, Geodäsie, Trigonometrie und Geographie gemacht worden sind, erhöhte Bedeutung. Desgleichen ist auf den andern Sinn, den der Jugendliche in den mit diesen Gebieten zusammenhängenden, teilweise sehr schwierigen Rechnungen sieht als etwa in ausgedehnteren analytischen Rechnungen, hingewiesen worden, ferner darauf, daß erst in einem solchen Unterricht die wertvollsten ethischen Kräfte geweckt werden, nämlich die Energie zur Ueberwindung anscheinend hoffnungsloser Schwierigkeiten, ein beharrlich auf das Ziel gerichteter Wille und das Selbstvertrauen auf die eigene Kraft.

Wie die gesamten Ausführungen zeigen, stellen die Richertschen Richtlinien für die Lehrpläne der höheren Schulen Preußens einen kinetischen Gleichgewichtszustand dar, der Verschiebungen sowohl im Sinne der hier befürworteten als auch abgelehnten Richtungen zugelassen hat.

1) Klein im Schlußwort bei Lietzmann: Berichte und Mitteilungen veranlaßt durch die IMUK. 1917.

Literaturverzeichnis.

E. du Bois-Reymond: Reden, 1. Bd., Leipzig 1912.

Denkschrift des Preußischen Ministeriums für Wissenschaft, Kunst und Volksbildung: Die Neuordnung des preußischen Schulwesens. Berlin 1924.

Dieck: Stoffauswahl und Lehrkunst im mathematischen Unterricht. Leipzig, 1918.

Doehlemann: Ueber den Bildungswert der reinen Mathematik. Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften. Frankfurt a. M. 1913.

Dreetz: Gruppenbegriff und Abbildung im mathematischen Unterricht. Lietzmann-Schottensche Zeitschrift für math. und naturw. Unterricht. 65. Jahrg. Leipzig. 1935.

Dreetz: Stoffauswahl und Methode im mathematischen Unterricht. Monatsschrift für höhere Schulen. Heft 5. Berlin, 1935.

Drenckhahn: Raumlehre in der deutschen Volksschule. Langensalza 1935.

Enriques: Probleme der Wissenschaft. Leipzig, 1910.

Gutzmer: Die Tätigkeit der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Aerzte. Leipzig, 1908.

Hilbert: Grundlagen der Geometrie. Leipzig 1903.

Hildebrandt: Positivismus und Natur. Zeitschrift für die gesamte Naturwissenschaft I. Braunschweig, 1935.

Höfler: Didaktik des mathematischen Unterrichts. Leipzig, 1910.

Katz: Psychologie und mathematischer Unterricht. in Kleins: Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland. Leipzig, 1910—1926.

Kerschensteiner: Theorie der Bildung. Leipzig, 1926.

Klein: Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert. 2 Bde. Berlin, 1926.

Klein: Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. Mathematische Annalen. Bd. 43. Berlin, 1893.

Klein: Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland. Leipzig, 1910—1916.

Klein: Vorschläge für die Umgestaltung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts an den höheren Schulen gerichtet an die Schulkommission der Naturforscherversammlung 1904. Göttingen, 1904.

Klein: Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. 2 Bde. Berlin, 1925.

Jungbluth: Mathematischer Arbeitsunterricht. Frankfurt a. M., 1927.

Lambeck: Philosophische Propädeutik. Leipzig, 1924.

Lehrpläne und Lehraufgaben von 1901. Halle, S., 1916.

Leibnitz: Hauptschriften zur Grundlegung der Philosophie. 2 Bde. Leipzig, 1904.

Lesser: Die Entwicklung des Funktionsbegriffs und die Pflege des funktionalen Denkens. Frankfurt a. M. 1907.

Lietzmann: Berichte und Mitteilungen, veranlaßt durch die Internationale Mathematische Unterrichtskommission. Leipzig, 1917.

Lietzmann: Methodik des mathematischen Unterrichtes. Leipzig, 1923.

Lindemann: Lehren und Lernen in der Mathematik. Rede beim Antritt des Rektorats der Universität München. 1904.

25 Jahre Meraner Reform. Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften. Frankfurt a. M., 1931.

Natorp: Allgemeine Pädagogik in Leitsätzen zu akademischen Vorlesungen. Marburg, 1905.

Naturwissenschaften, Zeitschrift die....; Festschrift anläßlich Kleins 70. Geburtstag. Berlin, 1919.

F. Pietzker: Ueber den wissenschaftlichen Charakter im elementaren Mathematikunterricht. Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften. Frankfurt a. M., 1910.
K. Pietzker: Nichteuklidische Geometrie im mathematischen Unterricht? Unterrichtsblätter... Frankfurt a. M., 1935.
Pringsheim: Ueber Wert und angeblichen Unwert der Mathematik. Festrede K. B. Akademie der Wissenschaften. München, 1904.
Richtlinien für die Lehrpläne der höheren Schulen Preußens v. Richert. Berlin, 1927.
Rudert: Die Grundlage des funktionellen Denkens in ihrer Bedeutung für den ersten mathematischen Unterricht. Berlin, 1919.
Scheffers und Kramer: Leitfaden der darstellenden und räumlichen Geometrie. Leipzig, 1924.
Schullehrbücher, die meisten der....
Schimmack: Die Entwicklung der mathematischen Unterrichtsreform in Deutschland. In Kleins Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland. Leipzig, 1910—1916.
Schimmack: Ueber die Verschmelzung verschiedener Zweige des mathematischen Unterrichts. Heft 7 der Berichte der Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission. Leipzig.
Spranger: Lebensformen. Halle a. S., 1925.
Tiedge: Bildungswerte des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts. Frankfurt a. M., 1933.
Timerding: Die Mathematik in den Physikalischen Lehrbüchern. In Kleins Abhandlungen über den mathem. Unterricht in Deutschland. Leipzig, 1910 bis 1916.
Timerding: Die Infinitesimalrechnung auf der Schule. Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft. X. Jahrg. 5. Stck. Leipzig, 1911.
Timerding: Die Verbreitung mathematischen Wissens und mathematischer Auffassung. In „Die Kultur der Gegenwart". Leipzig, 1914.
Treutlein: Der geometrische Anschauungsunterricht als Unterstufe eines zweistufigen geometrischen Unterrichts. Leipzig, 1911.
Tropfke: Geschichte der Elementarmathematik. Berlin, 1924.
Voß: Die Beziehungen der Mathematik zur Kultur der Gegenwart. In „Die Kultur der Gegenwart". Leipzig, 1914.
Volkmann, Paul: Erkenntnistheoretische Grundzüge der Naturwissenschaften. Leipzig, 1910.
Weber-Wellstein: Enzyklopädie der Elementarmathematik. 2. Bd. Leipzig, 1905.
Weinreich: Die sokratische Methode und wir Mathematiker. Beiheft zu den Unterrichtsblättern. Berlin, 1926.
Weinreich: Die Fortschritte der mathematischen Unterrichtsreform in Deutschland seit 1910. Leipzig 1915.
Wernicke: Mathematik und Philosophie. Unterrichtsblätter. Frankfurt a. M., 1914.
Wolff: Die Entwicklung der Abbildungsidee in Wissenschaft und Schule. Unterrichtsblätter. Frankfurt a. M., 1933.
K. L. Wolff und Ramsauer: Zur Geschichte der Naturanschauung in Deutschland. Zeitschrift für die gesamte Naturwissenschaft. Braunschweig, Juli 1935.
Zander: Definitionen. Unterrichtsblätter. Frankfurt a. M., 1935.
Zacharias: Einführung in die projektive Geometrie. Mathematisch-Physikalische Bibliothek. Bd. 6. Leipzig, 1930.
Zühlke: Der Unterricht in Linearzeichnen und in der darstellenden Geometrie an den deutschen Realanstalten. In Kleins Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland. Leipzig, 1910—1916.

Lebenslauf.

Am 4. Juni 1908 wurde ich, Karl Hermann Friedrich Herbert Pietzker, als Sohn des Rektors Karl Pietzker und seiner Ehefrau Elisabeth, geb. Müller, in Schkortleben bei Weißenfels geboren. Ostern 1927 bestand ich an der Oberrealschule der Franckeschen Stiftungen die Reifeprüfung. Ich studierte Mathematik und Naturwissenschaften zunächst in Halle a. S., dann in Freiburg i. Br. und schließlich wiederum in Halle. Am 19. Februar 1932 legte ich die wissenschaftliche Prüfung für das Lehramt an höheren Schulen ab. Die pädagogische Prüfung für das Lehramt an höheren Schulen bestand ich am 13. September 1934. Am 11. April 1935 erlangte ich in einer Erweiterungsprüfung die Lehrbefähigung in Physik als drittem Hauptfach.

Allen meinen verehrten Lehrern fühle ich mich zu dauerndem Dank verpflichtet. Zur Wahl des Themas der vorliegenden Doktorarbeit bin ich durch Herrn Professor Dr. Menzer veranlaßt worden. Es ist mir ein aufrichtiges Bedürfnis, ihm für seine Anteilnahme an der Arbeit und für die Förderung derselben auch an dieser Stelle meinen verbindlichsten Dank auszusprechen.